Universität Ulm

Abgabe:

05.07.11

Prof. Dr. W. Arendt
Markus Kunze
Sommersemester 2011

22 +8* Punkte

Lösungen zu Analysis 2

Blatt 11

Dieses ist das letzte Übungsblatt. Mit den Punkten auf diesem Blatt gab es insgesammt 250 Übungspunkte und 36 Zusatzpunkte. Um die Vorleistungen zu Analysis 2 zu bestehen sind mindestens 125 Punkte nötig.
Bitte meldet Euch so schnell wie möglich, spätestens jedoch bis zum 12. Juli 2011 zu den Vorleistungen zur Analysis 2 an. (Beachte: Es hat prüfungstechnisch *keine* Konsequenzen, wenn man sich zu den Vorleistungen angemeldet hat, diese dann aber nicht besteht.)
Informationen zur Klausur werden in Kürze auf der Homepage der Vorlesung veröffentlicht.

Tutoriumsaufgaben

Von nun an gibt es keine Tutoriumsaufgaben mehr, die verbleibenden Tutorien sollen zur Wiederholung des Stoffes genutzt werden.

Hausaufgaben

88. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma v$ falls [7]

(a) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x,y) = (x^2, y^2)$ und $\gamma(t) = (2t, 4t^2)$ für $0 \le t \le 1$.

(b) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $v(x,y,z) = (x+3x^2yz, zx^3, yx^3)$ und $\gamma(t) = (4t, t^2, 1-t)$ für $0 \le t \le 1$.

(c) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $v(x,y) = (xy, ye^x)$ und γ der (geschlossene) Streckenzug $[(0,0),(2,0),(2,1),(0,1),(0,0)]$.

Lösung: (a) Es ist $\gamma'(t) = (2, 8t)$ also

$$\int_\gamma v = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \int_0^1 2(2t)^2 + 8t(4t^2)^2\, dt = \big[\frac{8}{3}t^3 + \frac{64}{3}t^6\big|_0^1 = 24\,.$$

(Alternativ kann man auch sehen, dass $\frac{1}{3}(x^3+y^3)$ eine Stammfunktion des Feldes ist und dann die Endpunkte des Weges einsetzen).

(b) In Aufgabe 89 (d) wird gezeigt: $U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + x^3yz$ ist eine Stammfunktion von v. Nach Satz (25.1) ist

$$\int_\gamma v = U(v(1)) - U(v(0)) = U(4,1,0) - U(0,0,1) = 8 - 0 = 8$$

(c) Der Streckenzug $[(0,0),(2,0),(2,1),(0,1),(0,0)]$ ist die Summe der Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3.\gamma_4$, wobei $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$\gamma_1(t) = (2t, 0) \quad \gamma_2(t) = (2,t) \quad \gamma_3(t) = (2-2t, 1) \quad \gamma_4(t) = (0, 1-t)\,.$$

Es ist $\gamma_1' \equiv (2,0), \gamma_2' \equiv (0,1), \gamma_3' \equiv (-2,0)$ und $\gamma_4' \equiv (0,-1)$. Nun ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma v = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_i} v &= \int_0^1 2\cdot 0 \cdot 2t + 0 \cdot 2te^0\, dt + \int_0^1 0 + 1\cdot te^2\, dt \\ &+ \int_0^1 -2(2-2t)\cdot 1 + 1e^{2-2t}\cdot 0\, dt + \int_0^1 0 + (-1)\cdot(1-t)e^0 \\ &= 0 + \frac{1}{2}e^2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2-5)\end{aligned}$$

89. Entscheide, ob folgende Vektorfelder Gradientenfelder sind und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion. [8]

(a) $u(x,y) = (x^2 y, y^2 x - y)$ (b) $v(x,y) = (6x + y, 6x)$

(c) $w(x,y) = (y\cos x + \cos y, \sin x - x\sin y)$ (d) $f(x,y,z) = (x + 3x^2yz, zx^3, yx^3)$

Lösung: Beachte: Alle auftretenden Funktionen sind stetig differenzierbar und auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ definiert. Also kann der Satz von Poincaré angewandt werden.
(a) Es ist $\frac{\partial}{\partial y}x^2y = x^2$ und $\frac{\partial}{\partial x}y^2x - y = y^2$. Nach dem Satz von Poincaré ist u kein Gradientenfeld.
(b) Es ist $\frac{\partial}{\partial y}(6x + y) = 1 \neq 6 = \frac{\partial}{\partial x}6x$. Nach dem Satz von Poincaré ist v kein Gradientenfeld.
(c) Es ist $\frac{\partial}{\partial y}y\cos x + \cos y = \cos x - \sin y = \frac{\partial}{\partial x}\sin x - x\sin y$. Nach dem Satz von Poincaré ist w ein Gradientenfeld, also $w = \nabla U$ für eine differenzierbare Funktion U. Es muss gelten

$$U(x,y) = \int y\cos x + \cos y \, dx + c(y) = y\sin x + x\cos y + c(y)$$

wobei $c(y)$ eine stetig differenzierbare Funktion von y ist. Andererseits

$$U_y(x,y) = \sin x - x\sin y + c'(y) \overset{!}{=} \sin x - x\sin y$$

also können wir $c \equiv 0$ wählen. $U(x,y) = y\sin x + x\cos y$ ist demnach eine Stammfunktion von w.
(d) Es ist

$$D_2f_1 = 3x^2z = D_1f_2 \quad D_3f_1 = 3x^2y = D_1f_3 \quad D_3f_2 = x^3 = D_2f_3$$

also ist f nach dem Satz von Poincare ein Gradientenfeld. Für die Stammfunktion U muss gelten

$$U(x,y,z) = \int x + 3x^2yz \, dx + c(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x^3yz + c(y,z)$$

wobei c eine differenzierbare Funktion von y und z ist. Durch Ableiten stellt man fest, dass man $c \equiv 0$ wählen kann, also ist $U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + x^3yz$ eine Stammfunktion von f.

90. Es sei U eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass [7]

$$d_U(x,y) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [0, T_\gamma] \to U\,,\ \gamma(0) = x\,,\ \gamma(T_\gamma) = y\,,\ \gamma \text{ stückweise glatt}\}$$

eine Metrik auf U definiert. Hier bezeichnet $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ. Berechne außerdem $d_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}((-1,0),(1,0))$.

Hinweis: Um die Definitheit von d_U zu zeigen, zeige zunächst, dass $\|x - y\|_2 \leq L(\gamma)$ für alle Wege γ von x nach y.

Lösung: Um Definitheit zu zeigen, zeigen wir zunächst, dass $\|x - y\|_2 \leq L(\gamma)$ für alle Wege γ von x nach y. Sei hierzu zunächst $\pi = 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n < t_{n+1} = T_\gamma$ eine Partition von $[0, T_\gamma]$. Dann ist

$$\Gamma_\pi = [x, \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n), y]$$

ein Streckenzug (Polygonzug) durch Punkte auf γ. Dann ist

$$L(\Gamma_\pi) = \|x - \gamma(t_1)\|_2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_{j-1})\|_2 + \|y - \gamma(t_n)\|_2 \geq \|x - y\|$$

nach der Dreiecksungleichung. Nun ist aber $L(\gamma) = \lim_{|\pi| \to 0} L(\Gamma_\pi) \geq \|x - y\|_2$.

Nun also zur Definitheit: Ist $d_U(x,y) = 0$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ einen Weg γ_ε von x nach y mit $L(\gamma_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Wegen obiger Ungleichung gilt $\|x-y\|_2 \leq L(\gamma_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|x-y\|_2 = 0$ und somit, weil $\|\cdot\|_2$ definit ist, $x = y$.

Die Symmetrie von d_U folgt direkt aus der Beobachtung dass $\gamma : [0,T_\gamma] \to U$ genau dann ein stückweise glatter Weg in U von x nach y ist, wenn $\tilde{\gamma} : [0,T_\gamma] \to U$, gegeben durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(T_\gamma - t)$ ein stückweise glatter Weg in U von y nach x ist. Folglich wird in der Definition von $d_U(x,y)$ und $d_U(y,x)$ infima über dieselben Mengen gebildet.

Zur Dreiecksungleichung: Sind $x,y,z \in U$ und $\gamma_{x,y} : [0,T_1] \to U$ ein stückweise glatter Weg von x nach y und $\gamma_{y,z} : [0,T_2] \to U$ ein stückweise glatter Weg von y nach z, so ist $\gamma : [0,T_1{+}T_2] \to U$, definiert durch $\gamma(t) = \gamma_{x,y}(t)$ falls $0 \leq t \leq T_1$ und $\gamma(t) = \gamma_{y,z}(t-T_1)$ falls $T_1 < t \leq T_1 + T_2$, ein stückweise glatter Weg von x nach y. Somit folgt

$$d_U(x,z) \leq L(\gamma) = L(\gamma_{x,y}) + L(\gamma_{y,z})\,.$$

Da dies für alle Wege $\gamma_{x,y}$ resp. $\gamma_{y,z}$ gilt, kann man auf der rechten Seite Infima über solche Wege nehmen und erhählt $d_U(x,z) \leq d_U(x,y) + d_U(y,z)$.

Nun berechnen wir $d_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}((-1,0),(1,0))$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei γ_n der Streckenzug

$$[(-1,0),(-n^{-1},0),(0,n^{-1}),(n^{-1},0),(1,0)]\,.$$

Dann ist γ_n ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ von $(-1,0)$ nach $(1,0)$. Weiterhin ist $L(\gamma_n) = 2 + n^{-1}(2\sqrt{2}-2)$. Demnach ist

$$\|(-1,0)-(1,0)\|_2 = 2 \leq d_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}((-1,0)-(1,0)) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} L(\gamma_n) = 2\,.$$

Es folgt $d_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}((-1,0),(1,0)) = 2$.

91. Eine *exakte Differentialgleichung* ist eine Differentialgleichung der Form [8]

$$p(t,v(t)) + q(t,v(t))v'(t) = 0\,,$$

wobei $p,q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, sodass (p,q) ein Gradientenfeld ist.

(a) Es sei U eine Stammfunktion von (p,q). Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ genau dann die exakte Differentialgleichung löst, wenn $U(t,v(t))$ auf (a,b) konstant ist.

(b) Es sei $q(t_0,v_0) \neq 0$. Zeige, dass in die Lösung der exakten Differentialgleichung mit $v(t_0) = v_0$ in einer Umgebung von t_0 eindeutig ist. Genauer, zeige, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für zwei Lösungen $v_1, v_2 : (t_0 - \varepsilon + t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit $v_1(t_0) = v_0 = v_2(t_0)$ stets $v_1(t) = v_2(t)$ für alle $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt.

(c) Zeige, dass die Differentialgleichung

$$1 = 2tv(t)^2 + 2t^2v(t)v'(t)$$

exakt ist und finde eine Lösung v mit $v(1) = 1$.

Lösung: (a) Ist $v : (a,b) \to \mathbb{R}$, wobei I ein offenes Interval ist, eine Lösung der Differentialgleichung, so ist, nach Kettenregel,

$$\frac{d}{dt}U(t,v(t)) = p(t,v(t) + q(t,v(t))v'(t) = 0$$

für alle $t \in (a,b)$ und somit, weil (a,b) ein Intervall ist, $U(t,v(t))$ konstant auf (a,b). Ist umgekehrt $U(t,v(t))$ konstant auf (a,b), so zeigt eine Anwendung der Kettenregel wie oben, dass v die Differentialgleichung löst.

(b) Weil $U_y(t_0,v_0) = q(t_0,v_0) \neq 0$ nach Voraussetzung, gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen Umgebungen $I = (a,b)$ von t_0 und $J = (c,d)$ von v_0 und eine Funktion $v : I \to J$, sodass $U(t,y) = 0$ für $(t,y) \in I \times J$ genau dann, wenn $y = v(t)$. Aufgrund der Stetigkeit von q können wir annehmen, dass $q(t,y) \neq 0$ für alle $(t,y) \in I \times J$. Ansonsten verkleinern wir die Umgebungen.
Sei nun $w : I_1 \to \mathbb{R}$ eine andere Lösung der Differentialgleichung mit $t_0 \in I_1$. Wir können annehmen, dass $I_1 \subset I$ ist (sonst ersetze I_1 durch $I_1 \cap I$. Nach dem Satz über Implizite Funktionen und Teil (a) ist $v(t) = w(t)$ für alle $t \in I_1$ sodass $w(t) \in J$.
Sei nun $t_1 := \inf\{t \in I_1 \, : \, w(t) \neq v(t)\}$. Dann ist $t_1 > t_0$. In der Tat, weil $w(t_0) \in J$ ist, folgt $w(t) \in J$ für alle t in einer Umgebung $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ von t_0 aus der Offenheit von J und der Stetigkeit von w. Nach obigem ist dann aber auch $w(t) = v(t)$ für alle t in dieser Umgebung, also $t_1 \geq t_0 + \delta$.
Aus Stetigkeitsgründen folgt $w(t_1) = v(t_1)$, denn für $t < t_1$ gilt ja $w(t) = v(t)$ und daher $w(t_1) = \lim_{t \uparrow t_1} w(t) = \lim_{t \uparrow t_1} v(t) = v(t_1)$. Nun folgt aber $t_1 = \sup I_1 = \sup J$, denn wäre t_1 ein innerer Punkt, so folgt wie oben, dass $w(t) = v(t)$ in einer kleinen Umgebung von t_1 ist. Es folgt, dass $w(t) = v(t)$ für alle $t \in [t_0, \infty) \cap I_1$.
Analog sieht man, dass $w(t) = v(t)$ für alle $t \in (-\infty, t_0]$ ist. Man kann also das in der Aussage von Teil (b) jedes $\varepsilon > 0$ wählen, sodass $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset I$ ist.

(c) Die Gleichung ist von der Form $p(t,v(t)) + q(t,v(t))v'(t) = 0$ mit $p(t,y) = 1 - 2ty^2$ und $q(t,y) = 2t^2y$. Dann ist (p,q) ein Gradientenfeld mit Stammfunktion $U(t,y) = t - t^2y2$. In einer Umgebung von $(t_0,y_0) = (1,1)$ ist die Gleichung $U(t,y) = 0$ äquivalent mit $y = \sqrt{t}^{-1}$. Somit ist $v : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch $v(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ eine Lösung der Differentialgleichung.