Themenvorschläge zum Seminar Funktionalanalysis

Eine Bemerkung vorab: Bitte merkt euch die hier angegebene Literatur nicht in der Bibliothek vor, sollten die Bücher bereits ausgeliehen sein. Ihr könnt jederzeit bei den Betreuern des Seminars Kopien der benötigten Kapitel anfertigen.

Jedes Thema soll je zwei Personen bearbeitet werden, die den Inhalt gemeinsam erarbeiten und jeweils eine Hälfte (also 45 Minuten) des Vortrags bestreiten. Jede Person ist dann an zwei Themen beteiligt, wobei nicht zwangsweise beide Themen mit dem gleichen Partner bearbeitet werden müssen.
Die vorgeschlagenen Themen müssen nicht in der angegebenen Reihenfolge vorgetragen werden, und nicht alle aufgelisteten Themen müssen vergeben werden. Die Teilnehmer dürfen auch eigene Vorschläge machen, sollten diese dann allerdings mindestens eine Woche vor der Vorbesprechung mit den Veranstaltern des Seminars absprechen.

(1) Schauderbasen

In der Funktionalanalysis ist eine Basis im Sinne der linearen Algebra nur selten ein hilfreiches Konzept. In Hilberträumen kann man stattdessen Orthonormalbasen betrachten, die bessere analytische Eigenschaften haben. Sucht man in der Theorie allgemeiner Banachräume nach vergleichbaren Resultaten, gelangt man zum Begriff der *Schauderbasis*.

Hier soll eine Einführung in die Theorie der Schauderbasen gegeben werden. Es soll die Definition und eine Charakterisierung von Schauderbasen und unbedingten Schauderbasen gegeben werden, Beispiele von Schauderbasen in ℓ^p, $L^p(0,1)$ und $\mathrm{C}[0,1]$ gegeben werden und gezeigt werden, dass die trigometrischen Polynome keine Schauderbasis in $\mathrm{C}_{2\pi}$ sind. Falls noch Zeit bleibt, kann man zeigen, dass Schauderbasen invariant unter „kleinen Störungen“ sind.
Literatur: [LT77, 1.a–1.c], [Meg98, 4.1–4.3], [AK06, 1.1–1.3, 2.4]

(2) Klassische Banachräume I / II (zwei Vorträge, nicht unbedingt vom gleichen Team)

Die Räume $L^p(\Omega)$ mit dem Spezialfall ℓ^p und die Räume $\mathrm{C}(K)$ für kompakte Mengen K treten in vielen Zusammenhängen auf, auch außerhalb der Funktionalanalysis. Diese Räume haben viele interessante Eigenschaften, die teilweise nicht sofort ersichtlich und manchmal überraschend sind.

Im ersten Vortrag soll gezeigt werden, dass jeder separable Banachraum isometrisch isomorph zu einem Teilraum von $\mathrm{C}[0,1]$ ist. Als Anwendung ergibt sich, dass jeder Banachraum einen abgeschlossenen Teilraum mit Schauderbasis besitzt, indem man Resultate des Vortrags (1) benutzt. Schließlich kann man noch zeigen, dass c_0 in ℓ^∞ nicht stetig projezierbar ist.
Literatur: [AK06, 1.4, 2.5], [Wer00, IV.6]

Im zweiten Vortrag soll auf die Struktur der Räume c_0 und ℓ^p eingegangen werden. Weiterhin soll gezeigt werden, dass jeder separable Banachraum ein Quotient von ℓ^1 ist. Zudem sollen der Satz von Pitt und der Satz von Schur bewiesen werden.
Literatur: [AK06, 2.1–2.3], [LT77, 2.a], [Del09]

(3) Riesz'scher Darstellungssatz

Die Dualräume von c_0 und ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ sind recht einfach zu identifizieren. Allgemeiner kann man den Dualraum von $L^p(\Omega)$ stets angeben. Oft erweist sich diese konkrete Darstellung als sehr nützlich, wenn man mit schwach konvergenten Folgen arbeiten möchte. Ist K kompakt, so ist der Dualraum von $\mathrm{C}(K)$ ebenfalls explizit bekannt: Der Riesz'sche Darstellungssatz besagt, dass dieser durch die (signierten) Radon-Maße auf K gegeben ist.

Hier soll der Riesz'sche Darstellungssatz vorgestellt und bewiesen werden. Als Anwendung kann man charakterisieren, welche Folgen in $\mathrm{C}(K)$ schwach konvergieren.
Literatur: [Wer00, II.2.5, Beispiel S.107], [Rud87, Thm. 6.19],

(4) Lokalkonvexe Räume und der Satz von Krein-Milman

Es ist eine offensichtliche (aber nicht triviale) Tatsache, dass ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^d$, also ein beschränkter Durchschnitt endlich vieler Halbräume, mit der konvexen Hülle seiner Ecken übereinstimmt, wobei hier der Begriff „Ecke“ wie in der Operations-Research-Vorlesung zu verstehen ist. Eine ähnliche Aussage, der Satz von Krein-Milman, gilt in viel größerer Allgemeinheit, nämlich für kompakte, konvexe Teilmengen lokalkonvexer Räume, insbeondere also für kompakte, konvexe Teilmengen von normierten Räumen.

Hier soll zuerst der Begriff des lokalkonvexen Raums anhand von Beispielen motiviert werden. Es müssen einige topologische Grundbegriffe zur Verfügung gestellt werden, um damit lokalkonvexe Topologien zu definieren. Die fundamentalen Resultate der Theorie lokalkonvexer Räume sollen vorgestellt und schließlich der Satz von Krein-Milman bewiesen werden. Als Anwendung kann man erwähnen, warum c_0 und $L^1(0,1)$ keine Dualräume sind; hierfür benötigt man den Satz von Banach-Alaoglu, der man ohne Beweis zitieren kann.
Literatur: [Lax02, 13.1–13.2], [Wer00, VIII.4]

(5) Integraloperatoren

Entstanden ist die Funktionalanalysis aus dem Bestreben, die Erkenntnisse aus der linearen Algebra auch auf „unendliche Matrizen“ zu üebertragen. Dies funktioniert bei Operatoren zwischen ℓ^p-Räumen auf natürliche Weise, wobei sich natürlich Konvergenzfragen ergeben. Bald ergab sich aber auch der Wunsch, Operatoren auf beispielsweise $\mathrm{C}[0,1]$ zu betrachten, was einer Matrix mit „kontinuierlichen Einträgen“ entspricht, also einem *Kernoperator* T_k der Form $(T_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$. Man sieht hier direkt die Analogie zur Matrixmultiplikation – es wurde lediglich die Summe durch ein Integral ersetzt.

Hier sollen einige Klassen von Integraloperatoren auf ihre speziellen Eigenschaften untersucht werden. Es soll gezeigt werden, dass Kernoperatoren (im Speziellen Volterra-Operatoren) kompakt sind. Daraus lassen sich dann Resultate über das Spektrum der Operatoren und die Lösbarkeit sogenannter Integralgleichungen gewinnen. Als Anwendung sollte der Bezug zur Theorie der Differentialgleichungen hergestellt werden.
Literatur: [Lax02, 22.1–22.2], [Wer00, II.1], [Col06, 1.1]

(6) Integraltransformationen

In vielen Bereichen der Mathematik treten Funktional- oder Differentialgleichungen auf. Ein Ansatz, der in vielen konkreten Fällen zu Lösungen führt, sind Integraltransformationen des Problems. Zu den berühmtesten Anwendungen gehört die Fourier-Transformation als Methode zur Lösung von Differentialgleichungen.

Hier sollen einige konkrete Integraltransformationen (Fourier-Transformation, Laplace-Transformation, Hilbert-Transformation und Hilbert-Hankel-Transformation) vorgestellt werden

und aus operatorentheoretischer Sicht untersucht werden, insbesondere was die Beschränktheit der Operatoren in L^p betrifft. Als Hilfsmittel muss dazu der Satz von Riesz-Thorin bereitgestellt werden. Als Anwendung kann man einfache gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen mittels der vorgestellten Transformationen lösen.
Literatur: [Lax02, 16.2–16.3], [Wer00, II.4], [Eva98, 4.3]

(7) Spektraltheorie positiver Kernoperatoren

Die Perron-Frobenius-Theorie untersucht die Eigenwerte von Matrizen mit nicht-negativen Einträgen. Ein fundamentales Resultat dieser Theorie ist die Tatsache, dass Matrizen mit strikt positiven Einträgen einen eindeutigen betragsmäßig maximalen Eigenwert besitzen und dieser positiv und (algebraisch) einfach ist und einen Eigenvektor mit strikt positiven Einträgen besitzt. Die Perron-Frobenius-Theorie lässt sich auch für sogenannte Banach-Verbände entwickeln, also Banachräume, für deren Operatoren man den Begriff der „positiven Matrixeinträge" sinnvoll verallgemeinern kann.

Hier soll oben angesprochenes Resultat für Kernoperatoren $\mathbf{K} \in \mathscr{L}(\mathrm{C}(Q))$ (Q kompakt) bewiesen werden. Hierzu werden Resultate des Vortrags (5) verwendet. Zudem kann man die Konvergenzgeschwindigkeit diskutieren; der Beweis des Spezialfalls von endlichen Mengen Q, also Matrizen $\mathbf{K}$, überträgt sich direkt auf (Kern-)Operatoren. Als Anwendung können Random Walks auf Graphen diskutiert werden, beispielsweise der Google PageRank Algorithmus.
Literatur: [Lax02, 23.1–23.2], [HJ90, 8.2], [Fri07]

(8) Bochner-Integrale

Im Grundstudium wurde bereits der Schritt vom Riemann-Integral zum Lebesgue-Integral vollzogen, das sich in vielen Anwendungen als nützlicher erweist. Einen analogen Integralbegriff gibt es auch für Funktionen mit Werten in Banachräumen. Das zugehörige Integral heißt das *Bochner-Integral*.

Hier soll eine Übersicht über die Definition und die Eigenschaften des Bochner-Integrals gegeben werden. Hierbei kann man insbesondere auf die Radon-Nikodym-Eigenschaft von Banachräumen eingehen, die sogar schon für den skalaren Fall interessante Eigenschaften von Lipschitz-stetigen Funktionen zeigt.
Literatur: [ABHN01, 1.1–1.2], [AE01, X.2]

(9) Littlewood-Paley Theorie und Fourier Multiplikatoren

Es ist ein einfaches Resultat der Theorie von Orthonormalbasen, dass jede Funktion $f \in L^2(0, 2\pi)$ eine *Fourierreihendarstellung* $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx}$ mit $(c_k) \in \ell^2$ besitzt und umgekehrt jede Folge von Koeffizienten $(c_k) \in \ell^2$ eine Funktion in $L^2(0, 2\pi)$ beschreibt. Man schreibt auch $(\hat{f}_k) := (c_k)$. Daraus folgt sofort, dass es zu $(m_k) \in \ell^\infty$ und $f \in L^2(0, 2\pi)$ eine eindeutig bestimmte Funktion $g \in L^2(0, 2\pi)$ mit $(\hat{g}_k) = (m_k \hat{f}_k)$ gibt, und der Operator $T_m \colon L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$, $T_m f := g$ heißt *Fouriermultiplikator in* $L^2(0, 2\pi)$. Sei $p \in [1, \infty]$. Bildet T_m den Raum $L^p(0, 2\pi) \cap L^2(0, 2\pi)$ stetig nach $L^p(0, 2\pi)$ ab, so nennt man m einen *Fouriermultiplikator in* $L^p(0, 2\pi)$.

Hier soll ein zentrales Resultat der Theorie von Multiplikatoren bewiesen werden: Ist die Folge (m_k) auf allen dyadischen Intervallen $\{2^i + 1, \ldots, 2^{i+1}\}$ konstant, so ist T_m ein L^p-Fouriermultiplikator für $p \in (1, \infty)$. Für den Beweis wird der Satz von Littlewood-Paley benötigt, der unter anderem die Fourierkoeffizienten von L^p-Funktionen charakterisiert und Aussagen über die unbedingte Konvergenz einer Art von Fourierreihe in $L^p(0, 2\pi)$ trifft.
Literatur: [EG77, 1.1, 7.2–7.3, 8.2]

Literatur

[ABHN01] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, volume 96 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[AE01] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis. III.* Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[AK06] F. Albiac and N.J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2006.

[Col06] P. Collins. *Differential and Integral Equations*. Oxford University Press, 2006.

[Del09] S. Delpech. A short proof of Pitt's compactness theorem. *American Mathematical Society*, 137(4):1371–1372, 2009.

[EG77] R.E. Edwards and G.I. Gaudry. *Littlewood-Paley and multiplier theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 90.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Fri07] M. Frick. Mathematik hinter Google. Master's thesis, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2007. http://www.fa.uni-tuebingen.de/members/mafr/zula2007.pdf.

[HJ90] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Corrected reprint of the 1985 original.

[Lax02] P.D. Lax. *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[LT77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[Meg98] R.E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Wer00] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.