Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 1

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und nicht leer. Eine Funktion $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$ auf ganz Ω ist. Die Menge der in Ω harmonischen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(\Omega)$ bezeichnet. In dieser Aufgabe sollen mittels eines einfachen Zusammenhangs zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen einige grundlegende Eigenschaften harmonischer Funktionen (in zwei Variablen) bewiesen werden. Zeige:

(a) Ist $f\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind der Realteil $\operatorname{Re} f$ und der Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ von f harmonisch. (2)
Erinnerung: Holomorphe Funktionen sind analytisch, also lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, und somit insbesondere beliebig oft (komplex) differenzierbar.
Erinnerung (Cauchy-Riemann'sche partielle Differentialgleichungen): Betrachtet man zu einer Funktion f von $\Omega \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ die zugehörige Funktion $g = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, so ist f genau dann holomorph, wenn g stetig differenzierbar ist und $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{\partial g_2}{\partial x}$ auf Ω gilt. Dann ist

$$f'(x+iy) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$$

(b) Ist $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ und Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine in Ω holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Insbesondere ist für beliebige offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ also $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. (3)
Tipp: Falls es so ein f gibt, kann man f' durch $\operatorname{Re} f = u$ ausdrücken. Definiere also eine geeigenete Funktion g und wähle f als eine passende Stammfunktion von g.
Erinnerung: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und g holomorph in Ω, so gibt es eine in Ω holomorphe Funktion f mit $f' = g$.

(c) Hat $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ ein lokales Extremum, so ist u konstant. (2)
Erinnerung (Gebietstreue): Ist f eine in Ω holomorphe, nicht konstante Funktion und $U \subset \Omega$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend), so ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(d) Sei $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\mathbb{E}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Es gibt eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft, dass $u \mapsto u \circ \varphi$ eine Bijektion von $\mathcal{H}(\mathbb{E})$ nach $\mathcal{H}(\Omega)$ ist. (1)
Erinnerung (Riemann'scher Abbildungssatz): Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so ist entweder $\Omega = \mathbb{C}$ oder Ω ist *konform äquivalent* zu $\mathbb{E}$. Zwei Teilmengen von $\mathbb{C}$ heißen konform äquivalent, wenn es eine biholomorphe Abbildungen zwischen ihnen gibt, also eine bijektive, holomorphe Abbildung mit holomorpher Inversen.

(e) Ist $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ nach oben beschränkt, so ist u konstant. (2)
Tipp: Betrachte die Funktion e^f, wobei f eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f = u$ ist.
Erinnerung (Satz von Liouville): Sei f eine ganze Funktion, also in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Ist f beschränkt, so ist f konstant.

2. Sei $c > 0$. Es soll mit der *Methode der Charakteristiken* untersucht werden, ob die *semilineare Transportgleichung*

$$\text{(ST)} \quad \begin{cases} u_t(t,x) + cu_x(t,x) = u(t,x)^2, & x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0 \\ u(0,x) = \dfrac{-1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathrm{C}^1((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ besitzt. Hierzu versucht man, Kurven (sogenannte *Charakteristiken*) zu finden, entlang derer jede Lösung von (ST) eine gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt. Liegt nun auf jeder Charakteristik genau ein Punkt, auf dem der Wert der Funktion u vorgeschrieben wird, kann man die resultierenden Anfangswertprobleme lösen und daraus die Lösung entlang aller Charakteristiken berechnen. Überdecken die Charakteristiken nun zudem noch die Menge, auf der gelöst werden soll, so hat man die Lösung der Differentialgleichung bestimmt.

(a) Sei u eine Lösung von (ST), $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) := x_0 + ct$ und $v(t) := u(t, \varphi(t))$. Zeige, dass dann v die gewöhnliche Differentialgleichung $v'(t) = v(t)^2$ löst! (1)

(b) Bestimme die Lösung von $v'(t) = v(t)^2$, $v(0) = \frac{-1}{1+x^2}$ explizit! (1)

(c) Zeige, dass jede Lösung von (ST) $u(t, x_0 + ct) = \frac{-1}{t+(1+x_0^2)}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ erfüllt! (1)

(d) Bestimme eine Lösung von (ST) und zeige, dass diese eindeutig ist! (2)

3. Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Versuche, mit der Methode der Charakteristiken die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in \mathrm{C}^1((0,\infty)^2) \cap \mathrm{C}([0,\infty) \times (0,\infty))$ der Gleichung

$$\text{(LT)} \quad \begin{cases} xu_t(t,x) - tu_x(t,x) = u(t,x), & x > 0 \text{ und } t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$

zu beweisen! Versuche zudem, die Lösung in Abhängigkeit von f auszudrücken! (5)

Bemerkung: Man sieht an diesem Beispiel, dass bei partiellen Differentialgleichungen anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen unendlichdimensionale Lösungsräume auftreten können, hier parametrisiert durch $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+)$.