Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 1

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und nicht leer. Eine Funktion $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$ auf ganz Ω ist. Die Menge der in Ω harmonischen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(\Omega)$ bezeichnet. In dieser Aufgabe sollen mittels eines einfachen Zusammenhangs zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen einige grundlegende Eigenschaften harmonischer Funktionen (in zwei Variablen) bewiesen werden. Zeige:

(a) Ist $f\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind der Realteil $\operatorname{Re} f$ und der Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ von f harmonisch. (2)

Erinnerung: Holomorphe Funktionen sind analytisch, also lokal in eine Potenzreihe entwickelbar, und somit insbesondere beliebig oft (komplex) differenzierbar.

Erinnerung (Cauchy-Riemann'sche partielle Differentialgleichungen): Betrachtet man zu einer Funktion f von $\Omega \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ die zugehörige Funktion $g = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, so ist f genau dann holomorph, wenn g stetig differenzierbar ist und $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{\partial g_2}{\partial x}$ auf Ω gilt. Dann ist

$$f'(x+iy) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$$

Lösung: Schreibe $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$. Da holomorphe Funktionen analytisch sind, sind u und v lokal durch Potenzreihen gegeben und liegen daher in $\mathrm{C}^2(\Omega)$. Nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen ist zudem $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Durch Differenzieren dieser Identitäten folgt mit dem Satz von Schwarz

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Eine ähnliche Rechnung (oder alternativ die Holomorphie von if) zeigt $\Delta v = 0$.

(b) Ist $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ und Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine in Ω holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Insbesondere ist für beliebige offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ also $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. (3)

Tipp: Falls es so ein f gibt, kann man f' durch $\operatorname{Re} f = u$ ausdrücken. Definiere also eine geeigenete Funktion g und wähle f als eine passende Stammfunktion von g.

Erinnerung: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und g holomorph in Ω, so gibt es eine in Ω holomorphe Funktion f mit $f' = g$.

Lösung: Als Vorüberlegung nehmen wir einmal an, es gäbe eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$ und berechnen f' aus u. Dann ist nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $f' = u_x - iu_y$ die komplexe Ableitung von f.

Setze nun also $g := u_x - iu_y$. Die reelle Ableitung von g ist

$$g' = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ -u_{yx} & -u_{yy} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz über die Vertauschung von Ableitungen erfüllt g wegen $\Delta u = 0$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Folglich ist g eine in Ω holomorphe Funktion.

Da Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Stammfunktion G von g. Wähle nun $f(z) := G(z) - G(x_0) + u(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$. Nach Konstruktion ist g die komplexe Ableitung von f und somit gemäß des Zusammenhangs zwischen reeller und komplexer Ableitung

$$(\operatorname{Re} f)_x = \operatorname{Re} f' = \operatorname{Re} g = u_x$$

und

$$(\operatorname{Re} f)_y = -\operatorname{Im} f' = -\operatorname{Im} g = u_y.$$

Folglich ist $\nabla(\operatorname{Re} f) = \nabla u$. Da auch noch $\operatorname{Re} f(x_0) = u(x_0)$ erfüllt ist, folgt daraus $\operatorname{Re} f = u$.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige offene Menge und $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Wir zeigen, dass u in jedem Punkt (x_0, y_0) beliebig oft differenzierbar ist. Sei dazu $U \subset \Omega$ eine offene, einfach zusammenhängende Menge, die (x_0, y_0) enthält, beispielsweise eine kleine Kreisscheibe. Nach dem soeben Gezeigten gibt es eine in U holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Da sich f lokal als Potenzreihe schreiben lässt, ist auch u analytisch und somit insbesondere in (x_0, y_0) beliebig oft differenzierbar.

(c) Ist Ω einfach zusammenhängend und hat $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ ein lokales Extremum, so ist u konstant. (2)

Erinnerung (Gebietstreue): Ist f eine in Ω holomorphe, nicht konstante Funktion und $U \subset \Omega$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend), so ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum; sonst betrachte stattdessen $-u$. Es gibt also eine offene Kreisscheibe $U \subset \Omega$, die x_0 enthält und für die $u(x) \leq u(x_0)$ für alle $x \in U$ gilt.

Sei f eine in U holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f = u$. Ist u nicht konstant, so ist auch f nicht konstant. Nach dem Satz über die Gebietstreue holomorpher Funktionen ist $f(U)$ offen. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $x \in U$ mit $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(x_0) + \varepsilon$ und $\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} f(x_0)$, also $u(x) > u(x_0)$, im Widerspruch zur Wahl von U.

Bemerkung: Die Aussage bleibt richtig, falls Ω lediglich als zusammenhängend vorausgesetzt wird. Sei dazu x_0 das lokale Extremum und $A \subset \Omega$ die Menge aller Punkte in Ω, um die es eine Kreisscheibe gibt, auf der u konstant gleich $u(x_0)$ ist. Offenbar ist A offen.

Wir zeigen, dass A relativ abgeschlossen ist. Sei dazu (x_n) eine Folge in A, die gegen ein x in Ω konvergiert. Weil u der Realteil einer auf einer kleinen Kreisscheibe um x holomorphen Funktion ist, ist u in dieser Kreisschreibe als Potenzreihe darstellbar. Auf der Menge $\{x_n\}$ stimmt u mit der konstanten Funktion $u(x_0)$ überein. Also ist nach dem Identitätssatz für Potenzreihen u auf dieser Kreisscheibe konstant, was $x \in A$ zeigt.

Nun ist also A und $\Omega \setminus A$ eine disjunkte, offene Überdeckung von Ω. Weil x_0 nach dem ersten Aufgabenteil in A liegt und Ω zusammenhängend ist, ist $\Omega \setminus A$ leer, also $A = \Omega$. Dies zeigt die Behauptung.

(d) Sei $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Es gibt eine Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{D}$ mit der Eigenschaft, dass $u \mapsto u \circ \varphi$ eine Bijektion von $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ nach $\mathcal{H}(\Omega)$ ist. (1)

Erinnerung (Riemann'scher Abbildungssatz): Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so ist entweder $\Omega = \mathbb{C}$ oder Ω ist *konform äquivalent* zu $\mathbb{D}$. Zwei Teilmengen von $\mathbb{C}$ heißen konform äquivalent, wenn es eine biholomorphe Abbildungen zwischen ihnen gibt, also eine bijektive, holomorphe Abbildung mit holomorpher Inversen.

Lösung: Nach Voraussetzung gibt es eine biholomorphe Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{D}$. Diese leistet das Gewünschte. Ist nämlich $u \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, so gibt es eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Dann ist $f \circ \varphi$ in Ω holomorph, und daher $u \circ \varphi = \operatorname{Re}(f \circ \varphi) \in \mathcal{H}(\Omega)$. Analog sieht man, dass $v \mapsto v \circ \varphi^{-1}$ den Raum $\mathcal{H}(\Omega)$ nach $\mathbb{D}$ abbildet und daher die inverse Abbildung ist. Insbesondere ist die Zuordnung $u \mapsto u \circ \varphi$ bijektiv.

(e) Ist $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ nach oben beschränkt, so ist u konstant. (2)
Tipp: Betrachte die Funktion e^f, wobei f eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f = u$ ist.
Erinnerung (Satz von Liouville): Sei f eine ganze Funktion, also in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Ist f beschränkt, so ist f konstant.

Lösung: Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es eine ganze Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Dann ist e^f beschränkt, da ja $|\,\mathrm{e}^f\,| = \mathrm{e}^u$ ist. Also ist e^f sogar konstant, also $\mathrm{e}^f \equiv c$ für ein $c \neq 0$. Dann ist $f(z) \in S := \{\log(c) + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $\log(c)$ einen Logarithmus von c bezeichnet. Weil S eine diskrete Menge und f stetig ist, folgt hieraus (beispielsweise durch Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $\operatorname{Im} f$), dass f (und somit auch u) konstant ist.

Bemerkung: Alternativ könnte man den kleinen Satz von Picard verwenden, der besagt, dass eine nicht konstante ganze Funktion höchstens einen Wert in $\mathbb{C}$ nicht annimmt. Man bekommt dann das schärfere Resultat, dass eine auf $\mathbb{R}^2$ harmonische Funktion entweder konstant ist oder jeden Wert in $\mathbb{R}$ annimmt.

2. Sei $c > 0$. Es soll mit der *Methode der Charakteristiken* untersucht werden, ob die *semilineare Transportgleichung*

$$\text{(ST)} \qquad \begin{cases} u_t(t,x) + c u_x(t,x) = u(t,x)^2, & x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = \frac{-1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathrm{C}^1((0,\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,\infty) \times \mathbb{R})$ besitzt. Hierzu versucht man, Kurven (sogenannte *Charakteristiken*) zu finden, entlang derer jede Lösung von (ST) eine gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt. Liegt nun auf jeder Charakteristik genau ein Punkt, auf dem der Wert der Funktion u vorgeschrieben wird, kann man die resultierenden Anfangswertprobleme lösen und daraus die Lösung entlang aller Charakteristiken berechnen. Überdecken die Charakteristiken nun zudem noch die Menge, auf der gelöst werden soll, so hat man die Lösung der Differentialgleichung bestimmt.

(a) Sei u eine Lösung von (ST), $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) := x_0 + ct$ und $v(t) := u(t, \varphi(t))$. Zeige, dass dann v die gewöhnliche Differentialgleichung $v'(t) = v(t)^2$ löst! (1)

Lösung: Setzt man zuerst einmal mit einer beliebigen Funktion φ an, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\varphi(t)) = u_t(t,\varphi(t)) + u_x(t,\varphi(t))\varphi'(t) = u(t,\varphi(t))^2 + (\varphi'(t) - c) u_x(t,\varphi(t)).$$

Mit $\varphi' \equiv c$ erhält man $v' = v^2$.

(b) Bestimme die Lösung von $v'(t) = v(t)^2$, $v(0) = \frac{-1}{1+x^2}$ explizit! (1)

Lösung: Nach der Formel zur Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen ergibt sich

$$v(t) = \frac{-1}{t+d}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$. Einsetzen des Anfangswerts ergibt $d = 1 + x^2$, also

$$v(t) = \frac{-1}{t + (1+x^2)}.$$

Insbesondere ist die Gleichung global für $t \geq 0$ lösbar.

(c) Zeige, dass jede Lösung von (ST) $u(t, x_0 + ct) = \frac{-1}{t+(1+x_0^2)}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ erfüllt! (1)

Lösung: Nach dem ersten Aufgabenteil erfüllt $t \mapsto u(t, x_0 + ct)$ die Differentialgleichung des zweiten Aufgabenteils, und nach (ST) auch die Anfangswertbedingung. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die Lösung dieses Anfangswertproblems eindeutig, also gerade diese Funktion.

(d) Bestimme eine Lösung von (ST) und zeige, dass diese eindeutig ist! (2)

Lösung: Ist $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, so ist $x = x_0 + ct$ für $x_0 := x - ct$. Nach dem vorigen Aufgabenteil muss also jede Lösung

$$u(t,x) = \frac{-1}{t + (1 + x_0^2)} = \frac{-1}{t + 1 + (x - ct)^2}$$

erfüllen, was die Eindeutigkeit der Lösung zeigt. Zudem rechnet man nach, dass obige Formel tatsächlich eine Lösung von (ST) darstellt.

3. Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Versuche, mit der Methode der Charakteristiken die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in \mathrm{C}^1((0,\infty)^2) \cap \mathrm{C}([0,\infty) \times (0,\infty))$ der Gleichung

$$\text{(T)} \qquad \begin{cases} x u_t(t,x) - t u_x(t,x) = u(t,x), & x > 0 \text{ und } t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$

zu beweisen! Versuche zudem, die Lösung in Abhängigkeit von f auszudrücken! (5)

Bemerkung: Man sieht an diesem Beispiel, dass bei partiellen Differentialgleichungen anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen unendlichdimensionale Lösungsräume auftreten können, hier parametrisiert durch $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

Lösung: Der gleiche Ansatz wie bei (ST) liefert hier

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\varphi(t)) &= u_t(t,\varphi(t)) + u_x(t,\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{u(t,\varphi(t)) + t u_x(t,\varphi(t))}{\varphi(t)} + u_x(t,\varphi(t))\varphi'(t) \\ &= \tfrac{1}{\varphi(t)} u(t,\varphi(t)) + \big(\tfrac{t}{\varphi(t)} + \varphi'(t)\big) u_x(t,\varphi(t)), \end{aligned}$$

wobei bereits genutzt wird, dass man $\varphi(t) > 0$ für $t \geq 0$ erwartet. Wir sollten also φ so wählen, dass $\varphi'(t) = \frac{-t}{\varphi(t)}$ ist. Löst man diese gewöhnliche Differentialgleichung in getrennten Veränderlichen, erhält man

$$\varphi(t) = \sqrt{c - t^2}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Setzt man $x_0 := \varphi(0)$ und nimmt $x_0 > 0$ an, erhält man die maximale Lösung $\varphi(t) = \sqrt{x_0^2 - t^2}$ für $t \leq x_0$. Hier sind die Gleichungen, die zur Charakteristik führen, also nicht global lösbar, sondern bilden Abschnitte von Kreislinien. Offenbar überdecken sie aber dennoch den ganzen ersten Quadranten und enthalten je genau einen Punkt, in dem u vorgegeben ist.

Ist also x_0 fest und definiert man $v(t) := u(t, \sqrt{x_0^2 - t^2})$ für $t \in [0, x_0)$, so löst v nach Konstruktion von φ die gewöhnliche (lineare) Differentialgleichung

$$v'(t) = \tfrac{1}{\sqrt{x_0^2 - t^2}}\, v(t)$$

zum Anfangswert $v(0) = f(x_0)$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat obige Differentialgleichung genau eine maximale Lösung, und mit der Lösungsformel für Gleichungen in getrennten Veränderlichen berechnet man diese als

$$v(t) = f(x_0) \exp\Big(\int_0^t \tfrac{1}{\sqrt{x_0^2 - s^2}}\, \mathrm{d}s\Big) = f(x_0)\, \mathrm{e}^{\arcsin(t/x_0)}.$$

Sei nun also u eine Lösung von (T) und (t,x) in $[0,\infty) \times (0,\infty)$. Dann ist $x = \varphi(t)$ für $x_0 = \sqrt{x^2 + t^2}$, wobei wie oben $\varphi(t) := \sqrt{x_0^2 - t^2}$ definiert wird. Die obigen Überlegungen zeigen somit, dass

$$u(t,x) = f(x_0)\, \mathrm{e}^{\arcsin(t/x_0)} = f\big(\sqrt{x^2 + t^2}\big)\, \mathrm{e}^{\arcsin(t/\sqrt{x^2+t^2})}$$

gilt, was die Eindeutigkeit der Lösung zeigt. Mit ein wenig Ausdauer (oder Maple) kann man sich nun auch noch davon überzeugen, dass diese Formel tatsächlich eine Lösung von (T) definiert, womit die Behauptung gezeigt ist.