Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 2

4. *Laplaceoperator in Polarkoordinaten:* Sei $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeige, dass $v \in \mathrm{C}^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ und

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{v_r(r,\varphi)}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)}{r^2}$$

ist! (3)

5. *Poisson-Integralformel:* Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe und sei

$$j_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\, \mathrm{e}^{ikt}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $r \in [0,1)$. Für 2π-periodische, stetige Funktionen f und g sei wie üblich die Faltung als

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

definiert. Zeige:

(a) $j_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$ für $r \in [0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$. (3)
Tipp: Geometrische Reihe

(b) Ist f 2π-periodisch und stetig und

$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t,$$

so gilt

$$(j_r * f)(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$$

für $r \in [0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$. (3)

Sei $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ 2π-periodisch und seien c_0, (a_k) und (b_k) wie im vorigen Aufgabenteil. In der Vorlesung wurde das Dirichletproblem

$$(D_f)\begin{cases} u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}) & \\ \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{D}, \\ u(\cos\varphi, \sin\varphi) = f(\varphi) & \text{für } \varphi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

untersucht. Es wurde gezeigt, dass

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi)) \quad (r \in [0,1), \varphi \in \mathbb{R})$$

eine Funktion u in $\mathrm{C}^2(\mathbb{D}\setminus\{0\}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ definiert, die $\Delta u(x,y) = 0$ für $(x,y) \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ und $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$ erfüllt. Nun soll gezeigt werden, dass diese Funktion tatsächlich die eindeutige Lösung von (D_f) ist. Zeige:

(c) Die Funktion u erfüllt

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für $r \in [0,1)$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ und somit

$$u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\cos(t))^2+(y-\sin(t))^2}$$

für $(x,y) \in \mathbb{D}$. (3)

(d) Die Funktion u ist die eindeutige Lösung von (D_f). Insbesondere ist hier $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D})$ nachzuweisen. (3)
Tipp: Satz über die Vertauschung von Integration und Differentiation

6. *Hebbarkeit harmonischer Funktionen (**Bonus-Aufgabe**):* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, $x_0 \in \Omega$, $u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{x_0\})$ und $\limsup_{x\to x_0} u(x) < \infty$. Gibt es unter diesen Voraussetzungen stets ein $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $v|_{\Omega\setminus\{x_0\}} = u$? (5)
Erinnerung (Riemannscher Hebbarkeitssatz): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und f auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph. Falls f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, so gibt es eine auf Ω holomorphe Funktion g mit $g(z) = f(z)$ für $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.