Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 15.05.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 15 + 5

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 2

4. *Laplaceoperator in Polarkoordinaten:* Sei $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeige, dass $v \in \mathrm{C}^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$ und

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{v_r(r,\varphi)}{r} + \frac{v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)}{r^2}$$

ist! (3)

Lösung: Nach der Kettenregel ist v zweimal stetig differenzierbar. Zudem erhält man für die Ableitungen (wobei die Funktionsargumente immer die gleichen bleiben und hier der Übersichtlichkeit halber unterdrückt werden)

$$\begin{aligned}
v_r &= u_x\cos(\varphi) + u_y\sin(\varphi),\\
v_{rr} &= u_{xx}\cos^2(\varphi) + u_{xy}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + u_{yx}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + u_{yy}\sin^2(\varphi),\\
v_\varphi &= -u_x r\sin(\varphi) + u_y r\cos(\varphi),\\
v_{\varphi\varphi} &= -\big(-u_{xx}r\sin(\varphi) + u_{xy}r\cos(\varphi)\big)r\sin(\varphi) - u_x r\cos(\varphi)\\
&\quad + \big(-u_{yx}r\sin(\varphi) + u_{yy}r\cos(\varphi)\big)r\cos(\varphi) - u_y r\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Die behauptete Gleichheit lässt sich damit unmittelbar nachrechnen.

5. *Poisson-Integralformel:* Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskreisscheibe und sei

$$j_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\,\mathrm{e}^{ikt}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $r \in [0,1)$. Für 2π-periodische, stetige Funktionen f und g sei wie üblich die Faltung als

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

definiert. Zeige:

(a) $j_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$ für $r \in [0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$. (3)
Tipp: Geometrische Reihe

Lösung: Für $r \in [0,1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
j_r(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\big(r\,\mathrm{e}^{it}\big)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\big(r\,\mathrm{e}^{-it}\big)^k - 1 = \frac{1}{1-r\,\mathrm{e}^{it}} + \frac{1}{1-r\,\mathrm{e}^{-it}} - 1\\
&= \frac{(1-r\,\mathrm{e}^{-it}) + (1-r\,\mathrm{e}^{it}) - (1-r\,\mathrm{e}^{it} - r\,\mathrm{e}^{-it} + r^2)}{1-r\,\mathrm{e}^{it} - r\,\mathrm{e}^{-it} + r^2}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cdot\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2} + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.
\end{aligned}$$

(b) Ist f 2π-periodisch und stetig und

$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t,$$

so gilt

$$(j_r * f)(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

für $r \in [0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$. (3)

Lösung: Da jeder Summand 2π-periodisch ist, ist auch j_r 2π-periodisch. Da die Reihe in der Darstellung von j_r für $r \in [a,b] \subset [0,1)$ gleichmäßig bezüglich t konvergiert kann man Integration und Reihenbildung vertauschen und erhält

$$\begin{aligned}
(j_r * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ik(t-s)}\, f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\mathrm{e}^{ik(t-s)} + \mathrm{e}^{-ik(t-s)}\big) f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k(t-s)) f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{\pi} \bigg(\int_0^{2\pi} \cos(ks)\cos(kt) f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{2\pi} \sin(ks)\sin(kt) f(s)\,\mathrm{d}s \bigg) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big).
\end{aligned}$$

Sei $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ 2π-periodisch und seien c_0, (a_k) und (b_k) wie im vorigen Aufgabenteil. In der Vorlesung wurde das Dirichletproblem

$$(D_f) \begin{cases} u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}) & \\ \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{D}, \\ u(\cos\varphi, \sin\varphi) = f(\varphi) & \text{für } \varphi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

untersucht. Es wurde gezeigt, dass

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) \quad (r \in [0,1), \varphi \in \mathbb{R})$$

eine Funktion u in $\mathrm{C}^2(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ definiert, die $\Delta u(x,y) = 0$ für $(x,y) \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$ erfüllt. Nun soll gezeigt werden, dass diese Funktion tatsächlich die eindeutige Lösung von (D_f) ist. Zeige:

(c) Die Funktion u erfüllt

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi - t) + r^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

für $r \in [0,1)$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ und somit

$$u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\cos(t))^2 + (y-\sin(t))^2}$$

für $(x,y) \in \mathbb{D}$. (3)

Lösung: Nach den vorigen Aufgabenteilen ist für $r \in [0,1)$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (j_r * f)(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi)\cos(t) - 2r\sin(\varphi)\sin(t) + r^2} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{(r\cos(\varphi)-\cos(t))^2 + (r\sin(\varphi)-\sin(t))^2} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Setzt man $x := r\cos(\varphi)$ und $y := r\sin(\varphi)$ mit $r \in [0,1)$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, also einen beliebigen Punkt $(x,y) \in \mathbb{D}$, ein, und beachtet, dass dann $r^2 = x^2 + y^2$ gilt, ergibt sich die Behauptung.

(d) Die Funktion u ist die eindeutige Lösung von (D_f). Insbesondere ist hier $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D})$ nachzuweisen. (3)

Tipp: Satz über die Vertauschung von Integration und Differentiation

Lösung: Folgender einfach zu beweisende Satz über die Vertauschung von Differentiation und Integration sollte aus dem Grundstudium bekannt sein: Ist $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, existiert die partielle Ableitung f_y auf ganz $[a,b]\times[c,d]$ und ist f_y wiederum stetig, so definiert

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

eine differenzierbare Funktion $F\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und es gilt

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Wendet man dies induktiv und auf mehrere Variablen an, ergibt sich folgender Satz: Ist R das Rechteck $[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$, ist $g\colon [0,2\pi]\times R \to \mathbb{R}$ $((t,x,y) \mapsto g(t,x,y))$ stetig, existieren die partiellen Ableitungen jeder Ordnung nach x und y und sind alle diese partiellen Ableitungen stetig, so definiert

$$G(x,y) := \int_0^{2\pi} g(t,x,y)\,\mathrm{d}t$$

eine Funktion in $\mathrm{C}^\infty(R)$.

Sei nun R ein kompaktes Rechteck, das vollständig in $\mathbb{D}$ enthalten ist. Die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}\times R \to \mathbb{R}, \qquad h(t,x,y) := \frac{1}{(x-\cos(t))^2 + (y-\sin(t))^2}$$

ist die Verknüpfung der Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_1&\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, & \varphi(z) &:= \frac{1}{z},\\
\varphi_2&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & \varphi_2(x,y) &:= x^2+y^2,\\
\varphi_3&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & \varphi_3(t,x,y) &:= (x-\cos(t), y-\sin(t)),
\end{aligned}$$

die allesamt in C^∞ liegen. Wenn man nun noch beachtet, dass es nach Wahl von R ein $\varrho > 0$ mit $(\varphi_2 \circ \varphi_3)(t,x,y) \geq \varrho$ für alle $(x,y) \in R$ und $t \in \mathbb{R}$ gibt, folgt aus der Kettenregel, dass h beliebig oft (stetig partiell) differenzierbar ist. Daher ist

$$(x,y) \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\cos(t))^2 + (y-\sin(t))^2}$$

nach der ersten Überlegung eine beliebig oft auf R (stetig partiell) differenzierbare Funktion, was $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{D})$ zeigt.

Da Δu auf ganz $\mathbb{D}$ existiert, stetig ist und $\Delta u(x,y) = 0$ für $(x,y) \in \mathbb{D}\setminus\{(0,0)\}$ erfüllt, gilt $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{D}$. In der Vorlesung wurde bereits nachgewiesen, dass u die Randwerte annimmt. Daher ist u tatsächlich eine Lösung von (D_f).

6. *Hebbarkeit harmonischer Funktionen (**Bonus-Aufgabe**):* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, $x_0 \in \Omega$, $u \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{x_0\})$ und $\limsup_{x\to x_0} u(x) < \infty$. Gibt es unter diesen Voraussetzungen stets ein $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $v|_{\Omega\setminus\{x_0\}} = u$? (5)

Erinnerung (Riemannscher Hebbarkeitssatz): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und f auf

$\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph. Falls f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, so gibt es eine auf Ω holomorphe Funktion g mit $g(z) = f(z)$ für $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

Lösung: Im Allgemeinen gibt es kein solches v. Ein Gegenbeispiel ist $\Omega := \mathbb{R}^2$, $x_0 := (0,0)$ und $u(x,y) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$. Dann ist u auf jeder Kreisscheibe, die den Punkt $(0,0)$ nicht enthält, der Realteil eines komplexen Logarithmus. Nach Aufgabe 1 ist u also harmonisch auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Offenbar ist u in der Nähe der 0 nach oben beschränt und konvergiert genauer gesagt für $x^2+y^2 \to 0$ sogar gegen $-\infty$, ist also insbesondere nicht holomorph fortsetzbar.

Positive Antwort unter einer Zusatzvoraussetzung: Nehmen wir nun zusätzlich an, es gebe eine zu u gehörende holomorphe Funktion f wie in Aufgabe 1; es gelte also $\operatorname{Re} f = u$. Da u nach Voraussetzung bei x_0 nach oben beschränkt ist, ist e^f wegen $|\,\mathrm{e}^f\,| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} f} = \mathrm{e}^u$ bei x_0 beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz gibt es eine holomorphe Fortsetzung g von e^f auf Ω. Offenbar hat g keine Nullstellen. Da Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es eine auf Ω holomorphe Funktion h mit $h' = \frac{g'}{g}$ (vgl. Aufgabe 1), und wir können die freie Konstante für h so wählen, dass $h(x_1) = f(x_1)$ für ein $x_1 \neq x_0$ in Ω gilt. Nach der Kettenregel ist dann $h' = f'$, also $h = f$ auf $\Omega \setminus \{x_0\}$. Daher ist $v := \operatorname{Re} h$ eine harmonische Funktion, die u fortsetzt.

Bemerkung: Inbesondere zeigen die obigen Argumente, dass eine harmonische Funktion auf einer nicht einfach zusammenhängenden Menge nicht zwangsläufig der Realteil einer holomorphen Funktion ist. Man kann sogar zu jeder zusammenhängenden, aber nicht einfach zusammenhängenden Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einen Punkt $x_0 \notin \Omega$ finden, für den die Funktion $u(x) := \log(|x - x_0|)$ nicht der Realteil einer holomorphen Funktion ist. Genauer gesagt kann man hier jeden Punkt x_0 nehmen, der eine positive Windungszahl bezüglich einer in Ω verlaufenden Kurve hat.