Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 29.05.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 4

10. *Parabolische Gleichungen auf $\mathbb{R}$ mit konstanten Koeffizienten und die Black-Scholes-Gleichung:* Sei $T > 0$, $\alpha > 0$, β, γ, λ und a in $\mathbb{R}$ und $w(t,x) := \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u(\alpha t, x)$ für $u \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R})$. Eine Funktion v in $\mathrm{C}([0,T)\times\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ heißt *exponentiell beschränkt*, falls es Konstanten A und c mit $|v(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ für alle $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}$ bzw. $|v(x)| \le A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt. Eine Funktion auf $[0,T)\times(0,\infty)$ heißt *polynomiell beschränkt*, falls es Konstanten A und c gibt, für die $|v(t,x)| \le Ax^c$ für $x \ge 1$ und $|v(t,x)| \le Ax^{-c}$ für $x \in (0,1)$ gilt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} v \in \mathrm{C}^{1,2}((0,\alpha T)\times\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,\alpha T)\times\mathbb{R}) \\ v_t = v_{xx} \text{ auf } (0,\alpha T)\times\mathbb{R} \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

für jede exponentiell beschränkte Funktion $v_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ genau eine exponentiell beschränkte Lösung v besitzt. In diesem Fall ist v durch

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-\tfrac{y^2}{4t}\bigr) v_0(x-y)\,\mathrm{d}y$$

gegeben.

(a) Zeige, dass genau dann $u_t = u_{xx}$ gilt, wenn $w_t = \alpha w_{xx} - 2a\alpha w_x + (\alpha a^2 - \lambda)w$ gilt! (3)

Lösung: Sei zuerst $u_t = u_{xx}$. Dann ist

$$\begin{aligned} w_t &= -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u + \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,\alpha u_t && = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}(\alpha u_t - \lambda u) \\ w_x &= a\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u + \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u_x && = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}(au + u_x) \\ w_{xx} &= a^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u + 2a\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u_x + \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u_{xx} && = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}(a^2u + 2au_x + u_{xx}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\alpha w_{xx} - 2a\alpha w_x + (\alpha a^2 - \lambda)w \\ &\qquad = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}(\alpha a^2 u + 2\alpha a u_x + \alpha u_{xx} - 2a^2\alpha u - 2a\alpha u_x + \alpha a^2 u - \lambda u) \\ &\qquad = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}(\alpha u_{xx} - \lambda u) = w_t. \end{aligned}$$

Sei nun $w_t = \alpha w_{xx} - 2a\alpha w_x + (\alpha a^2 - \lambda)w$. Da nach Definition von w

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}\,w(t/\alpha, x)$$

gilt, stimmt die erste Rechnung analog mit vertauschten Rollen von u und w, wenn man λ durch $-\lambda/\alpha$, a durch $-a$ und α durch $1/\alpha$ ersetzt. Also erhält man

$$\begin{aligned} u_t &= \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}\bigl(\tfrac{1}{\alpha}w_t + \tfrac{\lambda}{\alpha}w\bigr) \\ u_x &= \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}(-aw + w_x) \\ u_{xx} &= \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}(a^2 w - 2aw_x + w_{xx}). \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$u_t = \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}\bigl(w_{xx} - 2aw_x + a^2 w - \tfrac{\lambda}{\alpha}w + \tfrac{\lambda}{\alpha}w\bigr) = u_{xx}$$

wie behauptet.

(b) Zeige, dass u genau dann exponentiell beschränkt ist, wenn w exponentiell beschränkt ist! (1)

Lösung: Dies folgt sofort aus den Formeln, mit denen sich u und w mittels der jeweils anderen Funktion darstellen lassen. Genauer folgt aus $|u(t,x)| \leq A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ die Ungleichung $|w(t,x)| \leq A\,\mathrm{e}^{|\lambda|T}\,\mathrm{e}^{(|a|+c)|x|}$, während aus $|w(t,x)| \leq A\,\mathrm{e}^{c|x|}$ die Ungleichung $|u(t,x)| \leq A\,\mathrm{e}^{|\lambda|T}\,\mathrm{e}^{(|a|+c)|x|}$ folgt; beachte, dass im zweiten Fall nur $t \in [0, \alpha T]$ zugelassen ist.

(c) Zeige, dass es für eine exponentiell beschränkte Funktion $v_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ genau eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} v \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}([0,T)\times\mathbb{R}) \\ v_t = \alpha v_{xx} + \beta v_x + \gamma v \text{ auf } (0,T)\times\mathbb{R} \\ v(0,x) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

gibt, und finde eine explizite Lösungsformel! (3)

Lösung: Wähle $a := -\frac{\beta}{2\alpha}$ und $\lambda := \alpha a^2 - \gamma$ und $u_0(x) := \mathrm{e}^{-ax}\,v_0(x)$, was eine exponentiell beschränkte Funktion definiert. Sei u die exponentiell beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann erfüllt w die Differentialgleichung

$$w_t = \alpha w_{xx} + \beta w_x + \gamma w$$

und die Anfangsbedingung

$$w(0,x) = \mathrm{e}^{ax}\,u(0,x) = v_0(x)$$

und ist somit eine exponentiell beschränkte Lösung des Problems.

Sei nun umgekehrt v eine beliebige Lösung des Problems. Dann definiert mit der gleichen Rechnung wie im ersten und zweiten Aufgabenteil

$$\tilde{u}(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda t/\alpha}\,\mathrm{e}^{-ax}\,v(t/\alpha, x)$$

eine exponentiell beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$ zum Anfangswert

$$\tilde{u}(0,x) = \mathrm{e}^{-ax}\,v(0,x) = \mathrm{e}^{-ax}\,v_0(x) = u_0(x).$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung ist also $\tilde{u} = u$ und daher $v = w$. Die Lösung des Problems ist also eindeutig.

Aus diesem Argument ergibt sich insbesondere die Gültigkeit der Lösungsformel

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}\,u(\alpha t, x) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{ax}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\!\left(-\tfrac{y^2}{4\alpha t}\right) u_0(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\!\left(-\tfrac{y^2}{4\alpha t} + ay\right) v_0(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\!\left(-\tfrac{z^2}{2} + a\sqrt{2\alpha t}\,z\right) v_0(x - \sqrt{2\alpha t}\,z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\!\left(-\tfrac{z^2}{2} - \beta\sqrt{\tfrac{t}{2\alpha}}\,z - \tfrac{\beta^2}{4\alpha}t + \gamma t\right) v_0(x - \sqrt{2\alpha t}\,z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

mit der linearen Substitution $y = \sqrt{2\alpha t}\,z$.

(d) Zeige, dass $V(t,x) := v(T-t, \log x)$ genau dann eine polynomiell beschränkte Lösung des Endwertproblems

$$\begin{cases} V \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)) \cap \mathrm{C}([0,T)\times(0,\infty)) \\ 0 = V_t + \alpha x^2 V_{xx} + (\alpha+\beta)xV_x + \gamma V \text{ auf } (0,T)\times(0,\infty) \\ V(T,x) = v_0(\log x) \text{ für } x \in (0,\infty) \end{cases}$$

ist, wenn v eine exponentiell beschränkte Lösung der Gleichung des vorigen Aufgabenteils ist! Das Problem hat also genau eine polynomiell beschränkte Lösung. (3)

Lösung: Es gelte $v_t = \alpha v_{xx} + \beta v_x + \gamma v$ für eine exponentiell beschränkte Funktion v. Sei $V(t,x) := v(T-t, \log x)$. Dann ist

$$V(T,x) = v(0, \log x) = v_0(\log x),$$

man hat die polynomielle Abschätzung

$$|V(t,x)| = |v(T-t, \log x)| \leq A\,\mathrm{e}^{c|\log x|} \leq \begin{cases} Ax^c, & x \geq 1, \\ Ax^{-c}, & x \in (0,1], \end{cases}$$

und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} V_t &= -v_t = -\alpha v_{xx} - \beta v_x - \gamma v \\ V_x &= \tfrac{v_x}{x} \\ V_{xx} &= \tfrac{v_{xx}}{x^2} - \tfrac{v_x}{x^2}. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$\alpha x^2 V_{xx} + (\alpha+\beta) x V_x + \gamma V = \alpha v_{xx} - \alpha v_x + (\alpha+\beta) v_x + \gamma v = -V_t$$

wie behauptet.

Sei nun umgekehrt V eine Lösung des Endwertproblems. Dann hat v die Form $v(t,x) = V(T-t, \mathrm{e}^x)$. Somit gilt

$$v(0,x) = V(T, \mathrm{e}^x) = v_0(\log \mathrm{e}^x) = v_0(x)$$

und

$$|v(t,x)| = |V(T-t, \mathrm{e}^x)| \leq \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{cx}, & x \geq 0, \\ A\,\mathrm{e}^{-cx}, & x \leq 0, \end{cases}$$

also gerade $|v(t,x)| \leq A\,\mathrm{e}^{c|x|}$. Nach der Kettenregel gilt zudem

$$\begin{aligned} v_t &= -V_t = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} V_{xx} + (\alpha+\beta)\,\mathrm{e}^x\, V_x + \gamma V, \\ v_x &= V_x\,\mathrm{e}^x \\ v_{xx} &= V_{xx}\,\mathrm{e}^{2x} + V_x\,\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

und daher

$$\alpha v_{xx} + \beta v_x + \gamma v = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} V_{xx} + \alpha\,\mathrm{e}^x V_x + \beta\,\mathrm{e}^x V_x + \gamma V = v_t$$

wie behauptet.

Die eindeutige Lösbarkeit des Endwertproblems in der Klasse der polynomiell beschränkten Funktionen folgt also aus der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung für v in der Klasse der exponentiell beschränkten Funktionen.

(e) Leite die in der Vorlesung angegebene explizite Lösungsformel für die eindeutige polynomiell beschränkte Lösung der Black-Scholes-Gleichung

$$\begin{cases} V \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T)\times(0,\infty)) \cap \mathrm{C}([0,T)\times(0,\infty)) \\ 0 = V_t + \frac{\sigma^2}{2} x^2 V_{xx} + rxV_x - rV \text{ auf } (0,T)\times(0,\infty) \\ V(T,x) = (x-K)^+ \text{ für } x \in (0,\infty) \end{cases}$$

für Parameter $\sigma > 0$, $K > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ her! (5)

Erinnerung: $y^+ := \max\{y, 0\}$.

Lösung: Für $\alpha := \frac{\sigma^2}{2}$, $\beta := r - \frac{\sigma^2}{2}$, $\gamma := -r$ und $v_0(x) := (\mathrm{e}^x - K)^+$ ist diese Gleichung ein Spezialfall der Gleichung im letzten Aufgabenteil. Also gibt es eine eindeutige polynomiell beschränkte Lösung V. Setzt man wieder

$$a := -\tfrac{\beta}{2\alpha} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{r}{\sigma^2} = \tfrac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2}$$

und

$$\lambda := \alpha a^2 - \gamma = \tfrac{(\sigma^2-2r)^2}{8\sigma^2} + r,$$

so hat die Lösung die Gestalt

$$\begin{aligned}
V(T-t,x) &= v(t, \log x) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-\tfrac{z^2}{2} + a\sqrt{2\alpha t}\, z\bigr) v_0(\log x - \sqrt{2\alpha t}\ z)^+ \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\bigl(-\tfrac{z^2}{2} + a\sqrt{2\alpha t}\, z\bigr)\bigl(x\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2\alpha t}\, z} - K\bigr) \,\mathrm{d}z \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \frac{x\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\bigl(-\tfrac{z^2}{2} + (a-1)\sqrt{2\alpha t}\, z\bigr) \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{x\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}\bigl(z - (a-1)\sqrt{2\alpha t}\bigr)^2 + (a-1)^2\alpha t\Bigr) \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl((a-1)^2\alpha t - \lambda t\bigr) \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}} - (a-1)\sqrt{2\alpha t}} \exp\bigl(-\tfrac{y^2}{2}\bigr) \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
I_2 &:= -\frac{K\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\bigl(-\tfrac{z^2}{2} + a\sqrt{2\alpha t}\, z\bigr) \,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{K\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}}} \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}\bigl(z - a\sqrt{2\alpha t}\bigr)^2 + a^2\alpha t\Bigr) \,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{K}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigl(a^2\alpha t - \lambda t\bigr) \int_{-\infty}^{\frac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}} - a\sqrt{2\alpha t}} \exp\bigl(-\tfrac{y^2}{2}\bigr) \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Die Werte dieser Intgrale lassen sich also mittels der Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\bigl(-\tfrac{y^2}{2}\bigr) \,\mathrm{d}y$$

der Standardnormalverteilung ausdrücken, nämlich

$$\begin{aligned}
I_1 &= x \exp\bigl(\alpha a^2 t - 2\alpha a t + \alpha t - \alpha a^2 t + \gamma t\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}} - (a-1)\sqrt{2\alpha t}\bigr) \\
&= x \exp\bigl(\beta t + \alpha t + \gamma t\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{t}} + \tfrac{\sigma^2+2r}{2\sigma^2}\sqrt{2\alpha t}\bigr) \\
&= x\ \Phi\Bigl(\frac{\log(x/K) + (\frac{\sigma^2}{2} + r)t}{\sigma\sqrt{t}}\Bigr)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_2 &= -K \exp\bigl(a^2\alpha t - \alpha a^2 t + \gamma t\bigr)\Phi\bigl(\tfrac{\log(x/K)}{\sqrt{2\alpha t}} - a\sqrt{2\alpha t}\bigr) \\
&= -K\,\mathrm{e}^{-rt}\,\Phi\Bigl(\frac{\log(x/K) - a\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\Bigr) \\
&= -K\,\mathrm{e}^{-rt}\,\Phi\Bigl(\frac{\log(x/K) - (\frac{\sigma^2}{2} - r)t}{\sigma\sqrt{t}}\Bigr).
\end{aligned}$$

Setzt man dies wieder ein, erhält man die endgültige Formel

$$V(t,x) = x\,\Phi\Big(\frac{\log(x/K) + (\frac{\sigma^2}{2}+r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)$$
$$- K\,\mathrm{e}^{-rt}\,\Phi\Big(\frac{\log(x/K) - (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).$$

als Lösung der Diffentialgleichung. Speziell für $t=0$ ergibt dies die in der Finanzmathematik gebräuchliche Formel zur Optionspreisberechnung.

11. Sei (a,b) ein Intervall in $\mathbb{R}$, $(c,d) \subset (a,b)$ ein Teilintervall und $f \in H^1(a,b)$. Zeige, dass die Einschränkung $g := f|_{(c,d)}$ in $H^1(c,d)$ liegt und $g' = f'|_{(c,d)}$ erfüllt! (2)

Lösung: Offenbar sind g und $f'|_{(c,d)}$ in $L^2(c,d)$. Sei $\varphi \in \mathrm{C}^1_c(c,d)$. Definiere

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in (c,d), \\ 0, & x \in (a,c) \cup (d,b). \end{cases}$$

Man sieht anhand der Definition von $\mathrm{C}^1_c(c,d)$ schnell ein, dass ψ in $\mathrm{C}^1_c(a,b)$ liegt. Also gilt nach Definition der schwachen Ableitung

$$\int_c^d g\varphi' = \int_a^b f\psi' = -\int_a^b f'\psi = -\int_c^d f'|_{(c,d)}\varphi.$$

Da $\varphi \in \mathrm{C}^1_c(c,d)$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.

12. Sei (a,b) ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \cdots < b_n = b$ eine Partition von $[a,b]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle. Wie üblich identifizieren wir in dieser Aufgabe Funktionen in $H^1(a,b)$ mit ihrem stetigen Repräsentanten auf $[a,b]$. Für $i = 1,\ldots,n$ sei f_i eine Funktion in $H^1(a_i,b_i)$ und es gelte $f_i(a_i) = f_{i-1}(b_{i-1})$ für $i = 2,\ldots,n$. Zeige, dass $f(x) := f_i(x)$, $x \in [a_i,b_i]$, eine Funktion $f \in H^1(a,b)$ definiert! (3)

Lösung: Es genügt, die Behauptung für $n=2$ zu zeigen, da der allgemeine Fall hieraus mittels vollständiger Induktion folgt. Sei also $a = a_1 < b_1 =: c = a_2 < b_2 = b$, $g \in H^1(a,c)$, $h \in H^1(c,b)$, $g(c) = h(c)$ und $f := g\,\mathbb{1}_{(a,c)} + h\,\mathbb{1}_{(c,b)}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in [a,c]$ und

$$h(x) = h(c) + \int_c^x h'(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in [c,b]$ gilt. Setzt man nun $v := g'\,\mathbb{1}_{(a,c)} + h'\,\mathbb{1}_{(c,b)} \in L^2(a,b)$, so definiert

$$u(x) := g(a) + \int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t$$

laut Vorlesung eine Funktion u in $H^1(a,b)$ mit $u' = v$. Für $x \in (a,c)$ gilt

$$u(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) = f(x).$$

Für $x \in (c,b)$ hat man

$$u(x) = g(a) + \int_a^c g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x h'(t)\,\mathrm{d}t = g(c) + \int_c^x h'(t)\,\mathrm{d}t = h(x) = f(x).$$

wegen $g(c) = h(c)$. Insgesamt zeigt dies $u = f$, also insbesondere $f \in H^1(a,b)$.