Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 19.06.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 38+7

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 5

Sei (a, b) ein reelles Intervall. Wie auch sonst immer werden auch für die Aufgaben auf diesem Blatt Funktionen in $H^1(a, b)$ stets mit ihrem stetigen Repräsentanten identifiziert.

13. Zeige:

(a) Jede Funktion in $H^1(a, b)$ ist Hölder-stetig. Genauer: Es gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{H^1(a,b)} |x - y|^{1/2}$$

für alle $f \in H^1(a, b)$ und alle $x, y \in [a, b]$. (2)
Bonusaufgabe: Für $f \in H^1(a, b)$ gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon |x - y|^{1/2}$$

für $|x - y| < \delta$. (2)

(b) Sei $f_\alpha(x) := x^\alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$ und $x \in [0, 1]$. Für $\alpha > 1/2$ liegt f_α in $H^1(0, 1)$, für $\alpha < 1/2$ hingegen nicht. (3)
Bemerkung: Insbesondere gibt es also Funktionen in $\mathrm{C}^1(0, 1) \cap \mathrm{C}[0, 1]$, die nicht in $H^1(0, 1)$ liegen.
Bonusfrage: Liegt $f_{1/2}$ in $H^1(0, 1)$? (1)

14. Sei (a, b) beschränkt und (f_n) eine Folge in $H^1(a, b)$. Die Folge (f_n') konvergiere in $L^2(a, b)$ gegen ein g in $L^2(a, b)$. Weiterhin gebe es ein $x_0 \in [a, b]$, für das die reelle Folge $(f_n(x_0))$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass (f_n) dann in der Norm von $H^1(a, b)$ gegen ein $f \in H^1(a, b)$ konvergiert, das $f' = g$ und $f(x_0) = c$ erfüllt! (4)
Bonusfrage: Bleibt das Resultat für $(a, b) = \mathbb{R}$ richtig? (2)

15. Sei $f \in H^1(a, b)$ und (a, b) beschränkt. Zeige:

(a) Die Funktion f ist genau dann in $\mathrm{C}^1[a, b]$, wenn f' in $\mathrm{C}[a, b]$ liegt. (2)

(b) Die Funktion f ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn f' in $L^\infty(a, b)$ liegt. (4)
Bonusaufgabe: Bestimme die Lipschitzkonstante von f in Abhängigkeit von f'! (2)

16. Zeige, dass für $f \in H^1(\mathbb{R})$ stets $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ gilt, also $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ ist! (5)
Tipp: Unter der Zusatzannahme $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ist der Beweis etwas einfacher, während der allgemeine Fall noch eine Zusatzüberlegung benötigt.

17. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\lambda \geq 0$ und $\beta > 0$. Wir untersuchen das elliptische Problem mit *inhomogenen gemischten Neumann- und Robin-Randbedingungen*

$$(P_{f,A,B}) \quad \begin{cases} u \in H^2(a, b), \\ \lambda u - u'' = f \text{ auf } (a, b), \\ \beta u(a) - u'(a) = A, \\ u'(b) = B \end{cases}$$

für $f \in L^2(a,b)$ und reelle Zahlen A und B. Sei $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a,b) \times H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ durch

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) := \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a)$$

für u und v aus $H^1(a,b)$ definiert. Zeige:

(a) Die Form $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a,b) \times H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ ist bilinear, symmetrisch und stetig. (3)

(b) Die Form $a_{\lambda,\beta}\colon H^1(a,b) \times H^1(a,b)$ ist koerziv, d.h. $a_{\lambda,\beta}(u,u) \geq \eta \|u\|^2_{H^1(a,b)}$ für alle $u \in H^1(a,b)$, wobei η eine positive Konstante ist. (3)
Hinweis: Beachte, dass auch $\lambda = 0$ zugelassen ist.

(c) Für alle $f \in L^2(a,b)$ gibt es genau ein $u \in H^1(a,b)$ mit

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) = \int_a^b fv$$

für alle $v \in H^1(a,b)$. (2)

(d) Seien f und u in $H^1(a,b)$. Es gilt genau dann

$$a_{\lambda,\beta}(u,v) = \int_a^b fv \text{ für alle } v \in H^1(a,b),$$

wenn u das Problem $(P_{f,0,0})$ löst. (3)

(e) Es gibt Funktionen f_1 und f_2 in $L^2(a,b)$, für die die Probleme $(P_{f_1,1,0})$ und $(P_{f_2,0,1})$ Lösungen besitzen. Für diese Lösungen schreiben wir h_1 und h_2. (2)

(f) Eine Funktion u ist genau dann eine Lösung von $(P_{f,A,B})$, wenn $u - Ah_1 - Bh_2$ das Problem $(P_{f-Af_1-Bf_2,0,0})$ löst. (1)

(g) Es gibt eine eindeutige Lösung von $(P_{f,A,B})$. (2)

(h) Ist f stetig auf $[a,b]$, so liegt die eindeutige Lösung von $(P_{f,A,B})$ in $\mathrm{C}^2[a,b]$ und ist somit eine klassische Lösung. (2)