Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 26.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 6

18. *Produktregel (Variante):* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeige, dass für u und v in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ auch das Produkt uv in $H^1(\Omega)$ liegt und $D_j(uv) = D_j u\, v + u\, D_j v$ gilt! (3)

Lösung: Offenbar sind sowohl uv als auch $D_j u\, v + u\, D_j v$ in $L^2(\Omega)$; hier geht ein, dass u und v beschränkt sind. Laut Vorlesung gibt es Folgen (u_n) und (v_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ und $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ und $D_j u_n \to D_j u$ und $D_j v_n \to D_j v$ in $L^2(U)$ für jedes $U \Subset \Omega$ und jedes $j = 1, \dots, d$. Für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt dann also

$$\begin{aligned}\int_\Omega uv D_j\varphi \leftarrow \int_\Omega u_n v_n D_j \varphi &= -\int_\Omega D_j(u_n v_n)\varphi \\ &= -\int_\Omega (D_j u_n\, v_n + u_n\, D_j v_n)\varphi \to -\int_\Omega (D_j u\, v + u\, D_j v)\varphi\end{aligned}$$

wobei die klassischen Produktregel, die klassische partielle Integration bei Testfunktionen und die Stetigkeit des Integrals bezüglich L^2-Konvergenz verwendet wurde.

19. *Kettenregel (Variante):* Sei $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Zeige, dass die Zuordnung $\varphi(u) := f \circ u$ eine Abbildung $\varphi\colon H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ definiert und $D_j \varphi(u) = (f' \circ u)\, D_j u$ gilt! (2)

Lösung: Für $f(0) = 0$ wurde die Behauptung bereits in der Vorlesung gezeigt. Im allgemeinen Fall erfüllt zumindest $g(x) := f(x) - f(0)$ die Voraussetzungen aus der Vorlesung, woraus $g \circ u \in H^1(\Omega)$ und $D_j(g \circ u) = (g' \circ u)\, D_j u$ folgt. Wegen $f \circ u = (g \circ u) + f(0)\, \mathbb{1}_\Omega$ und $\mathbb{1}_\Omega \in H^1(\Omega)$ mit $D_j\, \mathbb{1}_\Omega = 0$ folgt daraus die Behauptung.

20. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ mit $D_j u = 0$ für $j = 1, \dots, d$. Zeige:

(a) Die Funktion u ist *lokal konstant*, d.h. es gibt zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass u für fast alle $x \in B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$ mit einer Konstanten $c = c(x_0) \in \mathbb{R}$ übereinstimmt! (3)

Tipp: Zeige zuerst, dass die regularisierten Funktionen $\varrho_n * u$ lokal konstant sind!

Lösung: Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig und $\varepsilon > 0$ so klein, dass der Abschluss von $B(x_0, \varepsilon)$ noch in Ω liegt. Wählt man n hinreichend groß, so ist

$$B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \tfrac{1}{n}\}$$

und daher die Faltung $\varrho_n * u$ auf $B(x_0, \varepsilon)$ wohldefiniert. In der Vorlesung wurde nachgerechnet, dass $D_j(\varrho_n * u) = \varrho_n * D_j u$ auf Ω_n gilt, woraus nach Voraussetzung $\nabla(\varrho_n * u)$ auf $B(x_0, \varepsilon)$ folgt. Nach einem Satz des Grundstudiums, den man beispielsweise leicht aus dem Mittelwertsatz herleiten kann, folgt daraus, dass $\varrho_n * u$ auf $B(x_0, \varepsilon)$ konstant ist. Da aber $\varrho_n * u$ in $L^2(B(x_0, \varepsilon))$ gegen u konvergiert, nach Auswahl einer Teilfolge also fast überall, folgt hieraus die Behauptung.

(b) Ist Ω zudem zusammenhängend, so ist u konstant, d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $u(x) = c$ für fast alle $x \in \Omega$. (1)

Lösung: Aus dem vorigen Aufgabenteil folgt, dass wir einen lokal konstanten Repräsentanten u wählen können. Überdeckt man nämlich Ω mit abzählbar vielen

Kreisscheiben, auf denen u jeweils fast überall eine Konstante ist, so kann man u jeweils auf einer Nullmenge so abändern, dass u dort konstant ist, und hat dabei u insgesamt nur auf einer Nullmenge umdefiniert. Diese Änderungen sind miteinander konsistent, da die Konstanten, die zu verschiedenen Kreisscheiben gehören, die nicht-leeren Durchschnitt haben, notwendigerweise übereinstimmen.

Dass eine lokal konstante Funktion auf einer zusammenhängenden Menge konstant ist, sollte bekannt sein, wird hier aber der Vollständigkeit halber nochmals bewiesen. Sei dazu $x_0 \in \Omega$ beliebig und $c := u(x_0)$. Setze $A := u^{-1}(\{c\})$. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge ist A relativ abgeschlossen in Ω. Da u lokal konstant ist, ist A aber auch offen. Nach Definition des Zusammenhangs muss daher $A = \emptyset$ oder $A = \Omega$ gelten. Wegen $x_0 \in A$ haben wir dadurch $u(x) = c$ für alle $x \in \Omega$ bewiesen.

21. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und u und v in $H^1(\Omega)$. Zeige, dass auch $w := u \wedge v$, definiert durch $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$, in $H^1(\Omega)$ liegt, und bestimme die schwache Ableitung! (2)

Lösung: Man macht sich leicht klar, dass $w = u - (u - v)^+$ gilt, woraus mit der Vorlesung $w \in H^1(\Omega)$ und

$$D_j w = D_j u - D_j(u - v)\,\mathbb{1}_{\{u>v\}} = \begin{cases} D_j v, & \text{auf } \{u > v\}, \\ D_j u, & \text{auf } \{u \le v\}. \end{cases}$$

folgt.

Bemerkung: Nach dem Lemma von Stampacchia stimmen $D_j u$ und $D_j v$ auf $\{u = v\}$ fast überall überein.

22. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Abbildungen $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ und $u \mapsto |u|$ den Raum $H^1(\Omega)$ in sich selbst abbilden. Zeige, dass diese Abbildungen sogar stetig sind! (3)
Erinnerung (Umkehrung des Satzes von Lebesgue): Konvergiert (f_n) in $L^2(\Omega)$ gegen f, so gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}), die punktweise gegen f konvergiert, und eine Funktionen $g \in L^2(\Omega)$ mit $|f_{n_k}| \le g$ fast überall.

Lösung: Sei (u_n) eine in $H^1(\Omega)$ gegen u konvergente Folge. Um die Stetigkeit von $u \mapsto |u|$ nachzuweisen, genügt es, zu zeigen, dass jede Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n) eine Teilfolge $(u_{n_{k_\ell}})$ besitzt, für die $|u_{n_{k_\ell}}|$ in $H^1(\Omega)$ gegen $|u|$ konvergiert. Dies beweist nämlich, wie schon früher gezeigt und benutzt wurde, dass $|u_n|$ gegen $|u|$ konvergiert, was gerade die Folgenstetigkeit des Betrags zeigt. Der Einfachheit halber wird im Verlauf des Beweises auf Mehrfachindizes verzichtet, wodurch alle Teilfolgen wieder mit (u_n) bezeichnet werden.

Weil (u_n) in $H^1(\Omega)$ gegen u konvergiert, kann man nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (u_n) punktweise gegen u konvergiert und $(D_j u_n)$ für jedes $j = 1, \dots, d$ fast überall gegen $(D_j u)$ konvergiert und dass es zudem majorisierende Funktionen v und v_j in $L^2(\Omega)$ gibt, also $|u_n| \le v$ und $|D_j u_n| \le v_j$ gilt. Dies folgt nebenbei bemerkt aus dem Beweis des Satzes von Riesz-Fischer.

Da dann offenbar $(|u_n|)$ fast überall gegen $|u|$ konvergiert und $|u_n| \le v$ ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass $(|u_n|)$ in $L^2(\Omega)$ gegen $|u|$ konvergiert. Aus der Formel $D_j|v| = \operatorname{sgn} v\, D_j v$ folgt $|D_j|u_n|| \le |D_j u_n| \le v_j$ und die punktweise Konvergenz von $(D_j|u_n|)$ gegen $D_j|u|$ fast überall auf der Menge $M := \{u \ne 0\} \cup \{D_j u = 0\}$. Nach dem Lemma von Stampacchia ist allerdings M^c eine Nullmenge, was die punktweise Konvergenz fast überall und nach dem Satz von Lebesgue die Konvergenz von $(D_j|u_n|)$ gegen $D_j|u|$ in $L^2(\Omega)$ zeigt. Nach Definition der Norm von $H^1(\Omega)$ folgt daraus gerade die Konvergenz von $(|u_n|)$ gegen $|u|$ in $H^1(\Omega)$.

Aus den Identitäten $u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ und $u^- = (-u)^+$ folgt die Stetigkeit der anderen beiden Funktionen.

Bemerkung: Kennt man ein wenig mehr Funktionalanalysis, kann man die Aussage auch wie folgt beweisen: Aus der Formel für die Ableitung folgt $|||u|||_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Konvergiert also (u_n) in $H^1(\Omega)$ gegen u, so ist $|||u_n|||_{H^1(\Omega)}$ beschränkt und besitzt somit eine in $H^1(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $v \in H^1(\Omega)$. Weil die Einschränkung eines stetigen Funktionals $\varphi \in L^2(\Omega)'$ auf $H^1(\Omega)$ ein stetiges Funktional $\varphi|_{H^1(\Omega)} \in H^1(\Omega)'$ ergibt, folgt daraus, dass $(|u_n|)$ auch in $L^2(\Omega)$ schwach gegen v konvergiert. Da $(|u_n|)$ aber in $L^2(\Omega)$ sogar in Norm gegen $|u|$ konvergiert, folgt aus der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts $v = |u|$. Wir haben also gezeigt, dass $(|u_n|)$ in $H^1(\Omega)$ schwach gegen $|u|$ konvergiert, und es ist klar, dass $(|||u_n|||_{H^1(\Omega)})$ gegen $|||u|||_{H^1(\Omega)}$ konvergiert. Man kann mit den Eigenschaften eines Hilbertraums leicht nachrechnen, dass daraus bereits die Normkonvergenz von $(|u_n|)$ gegen $|u|$ in $H^1(\Omega)$ folgt.

23. Sei $d \geq 3$. Zeige:

(a) Sei

$$\varrho(x) := \mathrm{e}^{\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}} \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \quad \text{und} \quad u_n(x) := \varrho(nx).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ϱ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ liegt. Die Folge (u_n) konvergiert trotz $u_n(0) = 1$ in der Norm von $H^1(\mathbb{R}^d)$ gegen 0. (2)

Bemerkung: Dies zeigt, dass $H^1(\Omega)$ nicht stetig in $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ eingebettet ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist also nicht einmal $H^1(\Omega) \subset \mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

Lösung: Nach Konstruktion verschwindet u_n außerhalb von $B(0, \frac{1}{n})$, konvergiert also fast überall gegen 0, und wird durch $\mathbb{1}_{B(0,1)}$ dominiert. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert u_n also in $L^2(\mathbb{R}^d)$ gegen 0.

Zudem ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = n^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varrho(nx)|^2 \,\mathrm{d}x = n^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varrho(y)|^2 \frac{\mathrm{d}y}{n^d} \leq \frac{1}{n^{d-2}} \|\varrho\|^2_{H^1(\Omega)}$$

was die Behauptung zeigt.

(b) Es gibt eine Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$, die nicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt! (2)

Lösung: Laut erstem Aufgabenteil gibt es nicht-negative, stetige Funktionen u_n in $H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n(0) = 1$ und $\|u_n\|_{H^1} \to 0$, also insbesondere $u_n(x) \geq \frac{1}{2}$ auf einer Umgebung U_n von 0. Nach Wahl einer Teilfolge kann man $\|u_n\|_{H^1} \leq 2^{-n}$ erreichen. Dann definiert $u := \sum_{n=1}^\infty u_n$ wieder eine Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$, da die Reihe absolut konvergiert und $H^1(\mathbb{R}^d)$ vollständig ist. Da die Reihe insbesondere in $L^2(\mathbb{R}^d)$ konvergiert, kann man schließen, dass die Partialsummen fast überall gegen u konvergieren, insbesondere also $u \geq \frac{N}{2}$ fast überall auf der nicht-leeren, offenen Menge $\bigcap_{n=1}^N U_n$ gilt. Weil dies für jedes $N \in \mathbb{N}$ richtig ist, folgt, dass u unbeschränkt ist.

(c) Es gibt eine Funktion in $H^1(\mathbb{R}^d)$, die auf keiner offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt ist! (2)

Lösung: Sei u eine Funktion wie im vorigen Aufgabenteil, also eine nicht-negative Funktion in $H^1(\Omega)$ die in jeder Umgebung der 0 unbeschränkt ist. Dann sind auch die Funktionen u_q, die durch $u_q(x) := u(x+q)$ definiert sind, für jedes $q \in \mathbb{R}^d$ in $H^1(\Omega)$, nicht-negativ, unbeschränkt in jeder Umgebung von q, und $\|u_q\|_{H^1} = \|u\|_{H^1}$. Definiere $v := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} u_{q_n}$, wobei q_n eine Abzählung von $\mathbb{Q}^d$ sei. Weil die Reihe absolut konvergiert, ist v in $H^1(\Omega)$, und wegen punktweiser Konvergenz ist $v \geq 2^{-n} u_{q_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da jede offene Menge U eine Umgebung eines q_n ist, folgt hieraus, dass v auf jeder offenen Menge U unbeschränkt ist.