Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 10.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 20

Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 8

28. Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Matrix, $z \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) := Ux + z$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\Omega_1 := \varphi(\Omega_2)$. Zeige, dass die Zuordnung $u \mapsto u \circ \varphi$ als linearer Operator $L^2(\Omega_1) \to L^2(\Omega_2)$, $H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ und $H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$ ein isometrischer Isomorphismus ist! (4)
Tipp: Substitutionsregel für Lebesgue-integrierbare Funktionen.

Lösung: Zuerst einmal zur Erinnerung: Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\psi\colon A \to \psi(A) \subset \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus mit beschränkter Ableitung und $f \in L^1(\psi(A))$, so ist $f \circ \psi \in L^1(A)$ und es gilt

$$\int_A (f \circ \psi)\,\left|\det \psi'\right| = \int_{\psi(A)} f.$$

Man sieht sofort, dass φ ein Diffeomorphismus ist und $\det \varphi' = \det U = \pm 1$ gilt. Ist $u \in L^2(\Omega_1)$, so ist $|u|^2 \in L^1(\Omega_1)$. Daher gilt

$$\|u \circ \varphi\|^2_{L^2(\Omega_2)} = \int_{\Omega_2} |u \circ \varphi|^2 = \int_{\varphi(\Omega_2)} |u|^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega_1)}.$$

Also ist $u \mapsto u \circ \varphi$ isometrisch von $L^2(\Omega_1)$ nach $L^2(\Omega_2)$. Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass die Abbildung $v \mapsto v \circ \varphi^{-1}$ von $L^2(\Omega_2)$ nach $L^2(\Omega_1)$ isometrisch ist. Man sieht sofort, dass diese beiden Abbildungen zueinander invers sind. Dies zeigt, dass $u \mapsto u \circ \varphi$ sogar ein Isomorphismus zwischen $L^2(\Omega_1)$ und $L^2(\Omega_2)$ ist.

Sei nun $u \in H^1(\Omega_1)$. Wir schreiben $U = (U_{ij})$. Es soll gezeigt werden, dass $v := u \circ \varphi$ in $H^1(\Omega_2)$ liegt und

$$D_j v = \sum_{i=1}^d U_{ij}\ (D_i u \circ \varphi)$$

ist. Sei dazu h eine Testfunktion auf Ω_2. Nach der Kettenregel ist $g := h \circ \varphi^{-1}$ eine glatte Funktion auf Ω_1 und es gilt

$$\nabla h = (\nabla g \circ \varphi)\varphi' = (\nabla g \circ \varphi)U = \Big(\sum_{i=1}^d (D_i g \circ \varphi) U_{ij}\Big)_{j=1}^d$$

Da stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind, hat g in Ω_1 kompakten Träger. Also erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} v\ D_j h &= \int_{\Omega_2} (u \circ \varphi) \sum_{i=1}^d (D_i g \circ \varphi) U_{ij} = \sum_{i=1}^d U_{ij} \int_{\varphi(\Omega_2)} u\ D_i g \\ &= -\sum_{i=1}^d U_{ij} \int_{\varphi(\Omega_2)} D_i u\ g = -\sum_{i=1}^d U_{ij} \int_{\Omega_2} (D_i u \circ \varphi)(g \circ \varphi) \\ &= -\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^d U_{ij}\ (D_i u \circ \varphi)\ h.\end{aligned}$$

Dies zeigt die $v \in H^1(\Omega_2)$ und die Formel für $D_j v$, die man auch knapper als

$$\nabla v = (\nabla u \circ \varphi) U$$

formulieren kann. Insbesondere ergibt sich hieraus wie oben

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^1(\Omega_2)}^2 &= \int_{\Omega_2} |v|^2 + \int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega_2} |u \circ \varphi|^2 + \int_{\Omega_2} |\nabla u \circ \varphi|^2 \\ &= \int_{\Omega_1} |u|^2 + \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 = \|u\|_{H^1(\Omega_1)}^2,\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wird, dass $|xU| = |x|$ für jeden Zeilenvektor x gilt, da U eine orthogonale Matrix ist. Also ist $u \mapsto u \circ \varphi$ eine Isometrie von $H^1(\Omega_1)$ nach $H^1(\Omega_2)$. Führt man die gleichen Argumente für die Inverse $v \mapsto v \circ \varphi$ durch, hat man bewiesen, dass diese Abbildung sogar ein Isomorphismus ist.

Man überzeugt sich wie oben leicht, dass $u \mapsto u \circ \varphi$ eine Bijektion zwischen den Testfunktionen auf Ω_1 und den Testfunktionen auf Ω_2 ist. Weil diese Abbildung ein isometrischer Isomorphismus ist, werden die jeweiligen Abschlüsse ebenfalls bijektiv aufeinander abgebildet, was gerade bedeutet, dass die Abbildung eine Bijektion zwischen $H_0^1(\Omega_1)$ und $H_0^1(\Omega_2)$ ist. Da die Normen mit denen von $H^1(\Omega_1)$ und $H^1(\Omega_2)$ übereinstimmen, ist diese Abbildung isometrisch.

29. *Satz von Riemann-Lebesgue:* Sei $d \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei

$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d) := \left\{u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\right\}.$$

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ bezeichne $\hat{u}$ die Fouriertransformatierte von u. Zeige:

(a) Ist $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so ist $\hat{u} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$. (2)

Lösung: Nach Definition ist

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot y}\; \mathrm{d}y.$$

Ist (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$, die gegen ein x konvergiert, so konvergiert $u(y)\,\mathrm{e}^{-ix_n\cdot y}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ gegen $u(y)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot y}$. Zudem ist $|u(y)\,\mathrm{e}^{-ix_n\cdot y}| \le |u(y)|$ und nach Voraussetzung $|u| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert also $\hat{u}(x_n)$ gegen $\hat{u}(x)$. Das zeigt die Stetigkeit von $\hat{u}$.

(b) Die Abbildung $u \mapsto \hat{u}$ ist von $L^1(\mathbb{R}^d)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ stetig. (2)

Lösung: Die Abschätzung

$$\big|\hat{u}(x)\big| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big|u(y)\big|\big|\mathrm{e}^{-ix\cdot y}\big|\, \mathrm{d}y \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \big\|u\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

zeigt $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Konvergiere (u_n) in $L^1(\mathbb{R}^d)$ gegen ein $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\big|\hat{u}_n(x) - \hat{u}(x)\big| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big|u_n(y) - u(y)\big|\big|\mathrm{e}^{-ix\cdot y}\big|\, \mathrm{d}y = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \big\|u_n - u\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Daraus folgt

$$\big\|\hat{u}_n - \hat{u}\big\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \big\|u_n - u\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$$

für $n \to \infty$, also gerade die Behauptung.

Bemerkung: In Wirklichkeit hat man im ersten Schritt die Beschränktheit der Fouriertransformation als linearer Operator von $L^1(\mathbb{R}^d)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nachgerechnet. Die Stetigkeit folgt hieraus bereits und bedarf keiner weiteren Begründung, wenn man die entsprechende Charakterisierung aus der Funktionalanalysis kennt.

(c) Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|\hat{u}(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Insbesondere gilt $\hat{u} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. (2)

Tipp: Man kann die Rechenregeln für die Fouriertransformation ausnutzen.

Lösung: Die Funktion $v := u - \sum_{j=1}^d D_j^2 u$ liegt wieder in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Also ist $\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und hat laut Vorlesung die Darstellung

$$\hat{v} = \hat{u} - \sum_{j=1}^d (ix_j)^2 \hat{u} = (1 + |x|^2)\hat{u}.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit $c := \|v\|_\infty$.

(d) Für jedes $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{u} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$. (1)

Erinnerung: $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ist in $L^\infty(\Omega)$ abgeschlossen.

Hinweis: Man darf hier ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ dicht ist; diesen Satz kann man genau wie im Fall $L^2(\mathbb{R}^d)$ zeigen.

Lösung: Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Laut Hinweis gibt es eine Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, die in $L^1(\mathbb{R}^d)$ gegen u konvergiert. Nach dem bereits Gezeigten ist $\hat{u}_n \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$, und $(\hat{u}_n)$ konvergiert in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ gegen $\hat{u}$. Weil $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ abgeschlossen ist, folgt daraus $\hat{u} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

30. Zeige die in der Vorlesung nicht bewiesene Inklusion

$$\left\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \widetilde{\eta u} \in H^k(\mathbb{R}^d) \text{ für alle } \eta \in \mathcal{D}(\Omega)\right\} \subset H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

für $k \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$! (2)

Lösung: Der Fall $k = 1$ wurde in der Vorlesung bewiesen. Sei die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}$ richtig, sei $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und sei $\widetilde{\eta u} \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ für alle $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$. Laut Vorlesung ist dann $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$D_j \widetilde{\eta u} = \widetilde{D_j \eta\, u} + \widetilde{\eta D_j u}$$

für $j \in \{1, \ldots, d\}$. Daraus kann man ablesen, dass

$$\widetilde{\eta D_j u} = D_j \widetilde{\eta u} - \widetilde{D_j \eta\, u}$$

in $H^k(\mathbb{R}^d)$ liegt. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $D_j u$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegt, wenn man ausnutzt, dass $\eta D_j u$ für jedes $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ liegt. Nach Induktionshypothese folgt aus diesen beiden Beobachtungen $D_j u \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Das heißt aber nach Definition, dass u in $H^{k+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ liegt. Die Aussage folgt nun aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.

31. *Dichtheit der Testfunktionen in $H^k(\mathbb{R}^d)$:* Sei $d \in \mathbb{N}$. Wie üblich sei $H^0(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d)$. Sei $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, und sei $\eta_n(x) := \eta(x/n)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\eta_n(\varrho_n * u)$ für jedes $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ in der Norm von $L^2(\mathbb{R}^d)$ gegen u konvergiert. Zeige:

(a) Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und (u_n) und (v_n) Folgen in $H^k(\mathbb{R}^d)$. Für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| \leq k$ sei $(D^\alpha u_n)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $(D^\alpha v_n)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Dann ist die Folge der Produkte $(u_n v_n)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. (3)

Lösung: Sei (P_k) die zu beweisende Aussage für das entsprechende $k \in \mathbb{N}_0$. Aus $\|u_n v_n\|_2 \leq \|u_n\|_\infty \|v_n\|_2$ folgt, dass (P_0) richtig ist. Sei (P_k) für ein $k \in \mathbb{N}_0$ richtig und seien (u_n) und (v_n) Folgen wie in der Voraussetzung von (P_{k+1}). Für $j \in \{1, \ldots, d\}$ ist nach der Produktregel für Sobolevfunktionen

$$D_j(u_n v_n) = D_j u_n\, v_n + u_n\, D_j v_n.$$

Da sowohl das Paar $(D_j u_n)$ und (v_n) als auch das Paar (u_n) und $(D_j v_n)$ die Voraussetzungen von (P_k) erfüllt, folgt aus der Induktionshypothese, dass beide Summanden in $H^k(\mathbb{R}^d)$ beschränkt sind. Also ist $D_j(u_n v_n)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Die Beschränktheit von $(u_n v_n)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ folgt daraus, dass die Folgen insbesondere die Voraussetzungen von (P_0) erfüllen. Also ist $(u_n v_n)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Damit ist (P_{k+1}) bewiesen. Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt hiermit die Behauptung.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, α ein Multiindex, und $w_n^\alpha := n^{|\alpha|} D^\alpha \eta_n$. Für jeden Multiindex β ist die Folge $(D^\beta w_n^\alpha)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. (2)

Lösung: Nach der Kettenregel gilt

$$D^\alpha \eta_n(x) = \frac{1}{n^{|\alpha|}} D^\alpha \eta(x/n).$$

Also ist $w_n^\alpha(x) = D^\alpha \eta(x/n)$. Wiederum aufgrund der Kettenregel ergibt sich

$$D^\beta w_n^\alpha(x) = \frac{1}{n^{|\beta|}} D^{\alpha+\beta} \eta(x/n),$$

was $\|D^\beta w_n^\alpha\|_\infty \leq \|D^{\alpha+\beta}\eta\|_\infty$ zeigt.

(c) Ist $u \in H^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert $(\eta_n(\varrho_n * u))$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ gegen u. (2)
Bemerkung: Dies zeigt, dass die Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ dicht sind, also $H_0^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d)$.

Lösung: Für $k = 0$ ist die Aussage in der Vorlesung bewiesen worden. Sei die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}_0$ richtig und sei $u \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d)$. Setze $\varphi_n := \eta_n(\varrho_n * u)$. Die Konvergenz von φ_n gegen u in $L^2(\mathbb{R}^d)$ wurde in der Vorlesung bewiesen. Sei $j \in \{1, \ldots, d\}$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass $D_j \varphi_n$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ gegen $D_j u$ konvergiert. Wegen $D_j u \in H^k(\mathbb{R}^d)$ und

$$D_j \varphi_n = D_j \eta_n(\varrho_n * u) + \eta_n(\varrho_n * D_j u)$$

braucht man dazu nur zu beweisen, dass $r_n := D_j \eta_n(\varrho_n * u)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ gegen 0 konvergiert. Da $(\varrho_n * u)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ konvergiert und daher insbesondere in diesem Raum beschränkt ist, folgt aus den vorigen beiden Aufgabenteilen die Beschränktheit von $(n r_n)$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$, was $r_n \to 0$ in $H^k(\mathbb{R}^d)$ zeigt.