Universität Ulm
Abgabe: Freitag, 17.07.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2009
Punktzahl: 23

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 9

32. *Maximumsprinzip für schwach subharmonische Funktionen:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L^2(\Omega)$, $f \leq 0$, $\lambda \geq 0$, und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung $\lambda u - \Delta u = f$.

(a) Sei $\lambda = 0$. Zeige, dass u^+ in $H_0^1(\Omega)$ liegt, schlussfolgere $\int_\Omega |\nabla u^+|^2 = 0$, und beweise damit $u \leq 0$! (2)

(b) Sei $\lambda > 0$. Gilt auch unter dieser Voraussetzungen stets $u \leq 0$? (1)

33. *Maximumsprinzip mittels Dirichlet-Prinzip:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$, $g \geq 0$, $G \in H^1(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ eine H^1-Fortsetzung von g und $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutige H^1-Lösung des zugehörigen Dirichletproblems, also $\Delta u = 0$ und $u - G \in H_0^1(\Omega)$. Zeige:

(a) Ist $G \geq 0$ und $u - G$ sogar in $H_c^1(\Omega)$, so ist $u^+ - G$ in $H_0^1(\Omega)$. (2)

(b) Ist (φ_n) eine Folge in $H_c^1(\Omega)$, die in $H^1(\Omega)$ gegen $u - G$ konvergiert, und setzt man $u_n := \varphi_n + G$, so konvergiert und $(u_n^+ - G)$ in $H^1(\Omega)$ gegen $u^+ - G$. (1)

(c) $u^+ - G \in H_0^1(\Omega)$. (2)

(d) $u = u^+$, also $u \geq 0$. (2)
Hinweis: Es soll das Dirichlet-Prinzip verwendet werden.

34. *Allgemeiner linearer elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform:* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien a_{ij}, b_j, c_i und e in $L^\infty(\Omega)$. Für den formalen Differentialoperator

$$Lu := -\sum_{j=1}^d D_j\Big(\sum_{i=1}^d a_{ij} D_i u + b_j u\Big) + \sum_{i=1}^d c_i D_i u + eu$$

und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ versteht man unter einer *schwachen Lösung* des Problems

$$(D)\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ \;\; u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a_L(u,v) := \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v + \sum_{j=1}^d \int_\Omega b_j u D_j v + \sum_{i=1}^d \int_\Omega c_i D_i u v + \int_\Omega euv = \int_\Omega fv$$

für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es gebe $\alpha > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zeige:

(a) Die Form a_L ist auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ bilinear und stetig. (1)

(b) Gibt es $\delta < 2\alpha$ mit $\sum_{j=1}^{d}(b_j + c_j)^2 \le 2\delta e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung. (2)
Tipp: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $xy \le \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2$.

(c) Sind b_i und c_i stetig differenzierbar und gilt $\sum_{i=1}^{d}(D_i b_i + D_i c_i) \le 2e$ fast überall, so besitzt (D) eine eindeutige schwache Lösung. (3)

(d) Sind alle Funktionen hinreichend regulär und ist u eine schwache Lösung des Problems, so ist der Ausdruck Lu in der oben angegebenen Form wohldefiniert, und eine reguläre Funktion u, die in $H_0^1(\Omega)$ liegt, ist genau dann eine schwache Lösung, wenn sie $Lu = f$ erfüllt. Versuche, möglichst schwache Regularitätsvoraussetzungen zu stellen! (2)

35. *Maximale Regularität elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf* $\mathbb{R}^d$ *mit konstanten Koeffizienten:* Seien a_{ij}, b_j, c_i und e reelle Zahlen und die Matrix (a_{ij}) symmetrisch und positiv definit. Wir betrachten das Problem

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} D_j D_i u - \sum_{j=1}^{d} b_j D_j u + \sum_{i=1}^{d} c_i D_i u + eu = f,$$

für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, wobei der schwache Lösungsbegriff analog zu Aufgabe 34 definert wird. Man kann wie in Teil (c) von Aufgabe 34 zeigen, dass das Problem für $e > 0$ zu jedem $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Zeige:

(a) Es gibt ein $e_0 = e_0(a_{ij}, b_j, c_i) > 0$ mit der Eigenschaft, dass für $e \ge e_0$ und jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die schwache Lösung des Problems in $H^2(\mathbb{R}^d)$ liegt. (4)

(b) Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ eine schwache Lösung, so ist $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. (1)