Universität Ulm

Mittwoch, 07.07.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+2

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 4

11. Bestimme für folgende Funktionen f die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den zugehörigen Konvergenzradius:

(a) $f(z) = \mathrm{e}^z$, $z_0 = 1$; (2)

Lösung: Die Potenzreihe ist stets von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

und konvergiert auf der größten Kreisscheibe um z_0, auf die f holomorph fortgesetzt werden kann.
Konkret ergibt sich hier

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!}(z-1)^n,$$

was auch wegen $\mathrm{e}^z = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{z-1}$ klar ist. Der Konvergenzradius ist $R = \infty$.

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1$; (2)

Lösung: Die Ableitungen sind

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}},$$

wie man leicht per Induktion zeigt. Wieder aus der allgemeinen Formel ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

als Potenzreihe von f, was man aber auch leicht aus der Formel für die geometrische Reihe hätte bekommen können. Der Konvergenzradius der Reihe ist $R = 1$.

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$. (2)

Lösung: Mit Partialbruchzerlegung erhält man

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) z^n$$

als Potenzreihendarstellung. Der Konvergenzradius ist $R = 1$.

12. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zeige, dass dann auch folgende Reihen Konvergenzradius R haben:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, wobei es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $b_n = a_n$ für alle $n \geq n_0$ gebe; (1)

Lösung: Dies folgt daraus, dass die Formel für den Konvergenzradius nur vom Grenzwertverhalten von (a_n) abhängt.

(b) $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$, $m \in \mathbb{N}_0$; (1)

Lösung: Dies ist ein Spezialfall des vorigen Aufgabenteils.

(c) $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}$, $m \in \mathbb{N}_0$; (1)

Lösung: Der Konvergenzradius ist nach Formel

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+m}|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

da sich der Limes Superior einer Folge durch einen Shift nicht ändert, wie sofort aus der Definition folgt.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. (1)

Lösung: Es genügt zu zeigen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k |a_n|}$$

gilt. Die Abschätzung $\leq$ ist sofort klar.
Für die andere Abschätzung sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen $\sqrt[n]{n^k} \to 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{n^k} \leq (1+\varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt

$$\sqrt[n]{n^k |a_n|} \leq (1+\varepsilon) \sqrt[n]{|a_n|}$$

für alle $n \geq n_0$, was

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k |a_n|} \leq (1+\varepsilon) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Lässt man ε gegen 0 gehen, folgt die Behauptung.

13. Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$ und log der Hauptzweig des Logarithmus auf Ω, also diejenige holomorphe Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, die $\log(1) = 0$ erfüllt. Sei $z_0 \in \Omega$.

(a) Bestimme die Potenzreihendarstellung $P_{z_0}(z)$ von log zum Entwicklungspunkt z_0! (2)

Lösung: Wegen $\log(z)' = \frac{1}{z}$ gilt

$$\log^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n}$$

für alle $n \geq 1$, wie man per Induktion zeigen kann. Die Potenzreihe ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n} (z-z_0)^n = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n(-z_0)^n}.$$

(b) Bestimme den Konvergenzradius R_{z_0} von $P_{z_0}(z)$! (2)

Lösung: Mit den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n(-z_0)^n}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}|z_0|} \to \frac{1}{|z_0|},$$

was zeigt, dass der Konvergenzradius $R_{z_0} = |z_0|$ ist, die Reihe also auf der größten Kreisscheibe konvergiert, die 0 nicht enthält.

(c) Bestimme, für welche $z_0 \in \Omega$ der Kreis $B(z_0, R_{z_0})$ in Ω enthalten ist! (2)

Lösung: Dies ist genau für $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ der Fall. Schreiben wir für den Beweis $z_0 = x + iy$. Die Bedingung $B(z_0, R_{z_0}) \subset \Omega$ ist äquivalent dazu, dass

$$R_{z_0}^2 \leq |z_0 - w|^2 \quad \forall w \leq 0$$

gilt, was sich wiederum als

$$x^2 + y^2 \leq (x-w)^2 + y^2 \quad \forall w \leq 0$$

schreiben lässt, d.h.

$$|x| \leq |x-w| \quad \forall w \leq 0.$$

Für $x < 0$ ist dies nicht erfüllt, wie man beispielsweise durch die Wahl $w = x$ sieht. Für $x \geq 0$ hingegen ist

$$|x| = x \leq x - w = |x-w|$$

für alle $w \leq 0$, was zeigt, dass in diesem Fall die Bedingung erfüllt ist.

14. *Maximumsprinzip auf einem Streifen:* Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Sei $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und auf Ω holomorph. Es gelte $|f(iy)| \leq 1$ und $|f(1+iy)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Es gelte $\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} f(z) \to 0$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gebe es ein $R \geq 0$ mit $|f(z)| \leq \varepsilon$ für $|\operatorname{Im} z| \geq R$. Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$. (2)

Lösung: Sei R_1 die zu $\varepsilon := 1$ gehörende Konstante. Definiere

$$\Omega_R := \{z \in \Omega : |\operatorname{Im} z| < R\}.$$

Nach Wahl von R gilt dann $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \Omega \setminus \Omega_R$.
Zudem ist dann $|f(z)| \leq 1$ auf $\partial\Omega_R$. Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete folgt dann $|f(z)| \leq 1$ auch für $z \in \Omega_R$.

(b) Ist f auf $\overline{\Omega}$ beschränkt, so gilt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$. (2)
Tipp: Betrachte $f_n(z) := f(z)\,\mathrm{e}^{(z^2-1)/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Die Funktionen f_n im Tipp sind wiederum holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Zudem gilt

$$|f_n(z)| = |f(z)|\,\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z^2-1)/n} = |f(z)|\,\mathrm{e}^{((\operatorname{Re} z)^2-(\operatorname{Im} z)^2-1)/n} \leq |f(z)|\,\mathrm{e}^{-(\operatorname{Im} z)^2/n},$$

woraus man ablesen kann, dass f_n alle Voraussetzungen des vorigen Aufgabenteils erfüllt. Folglich gilt $|f_n(z)| \leq 1$ für alle $z \in \Omega$. Da f_n für $n \to \infty$ punktweise gegen f konvergiert, folgt hieraus die Behauptung.

(c) Die Funktion $f(z) = \exp(\mathrm{e}^{\pi i(z-\frac{1}{2})})$ erfüllt die Bedingungen dieser Aufgabe, ist aber unbeschränkt auf Ω. (+2)
Bemerkung: Aus Darstellungsgründen ist hier die Exponentialfunktion einmal als $\exp(z) := \mathrm{e}^z$ geschrieben.

Lösung: Holomorphie und Stetigkeit sind klar. Zudem ist

$$\mathrm{e}^{\pi i(iy-\frac{1}{2})} = \mathrm{e}^{-\pi y}\,\mathrm{e}^{-\pi i/2} = -i\,\mathrm{e}^{-\pi y},$$

was

$$|f(iy)| = \exp(\operatorname{Re}\mathrm{e}^{\pi i(z-\frac{1}{2})}) = 1$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ zeigt. Analog erhält man aus

$$\mathrm{e}^{\pi i(1+iy-\frac{1}{2})} = \mathrm{e}^{-\pi y}\,\mathrm{e}^{\pi i/2} = i\,\mathrm{e}^{-\pi y},$$

dass $|f(1+iy)| = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion erfüllt also alle Bedingungen der Aufgabe.
Setzt man nun speziell $z = \frac{1}{2} + iy$ ein, ergibt sich

$$f(z) = \exp(\mathrm{e}^{-\pi y}),$$

was für $y \to -\infty$ die Unbeschränktheit von f zeigt.