Universität Ulm

Mittwoch, 14.07.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Blatt 5

15. Bestimme das maximale Gebiet, auf dem folgende formale Laurentreihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2)!}$; (1)

Lösung: Das größte Gebiet, auf dem eine Laurentreihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

konvergiert, ist laut Vorlesung der Kreisring $B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$, wobei R der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

und $\frac{1}{r}$ der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^n$$

ist. Im Folgenden braucht man also nur für alle Beispiele r und R zu bestimmen, wobei das Gebiet im Fall $r \geq R$ die leere Menge ist.

Mit der Formel von Cauchy-Hadamard, vgl. Aufgabe 4, folgt aus

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n^2)!} \geq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

dass

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

und

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = 0$$

und daher $R = \infty$ und $\frac{1}{r} = \infty$ gilt. Die Laurentreihe konvergiert also auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{5\,\mathrm{e}^{|n|}}$; (1)

Lösung: Aus

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

folgt $R = \mathrm{e}$. Zudem ist

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5\,\mathrm{e}^n}} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

Der Konvergenzbereich ist also $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\mathrm{e}} < |z| < \mathrm{e}\}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 2^n (z-1)^{5n}$. (2)

Lösung: Die Koeffizienten dieser Laurentreihe sind

$$a_k = \begin{cases} n^2 2^n = \frac{k^2}{5^2} 2^{k/5}, & k = 5n,\ n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[5]{2}$$

und

$$r = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} = 2^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Die Laurentreihe konvergiert also auf keinem Gebiet.

16. Bestimme diejenige Laurentreihendarstellung von f im Entwicklungspunkt z_0, die in einer punktierten Umgebung von z_0 konvergiert, und gib den Konvergenzbereich an:

(a) $f(z) := \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^{17}}$, $z_0 := 0$; (1)

Lösung: Die Laurentreihe ist

$$f(z) = \frac{1}{z^{17}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-17}}{n!} = \sum_{n=-17}^{\infty} \frac{z^n}{(n+17)!}.$$

Diese konvergiert auf der größten punktierten Kreisscheibe um z_0, auf die f holomorph fortgesetzt werden kann, also auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $f(z) := \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$, $z_0 := 1$; (2)

Lösung: Die Funktion ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1,3\}$ holomorph, und 3 ist keine hebbare Singularität. Das Konvergenzgebiet der Laurentreihe ist also $B_2(1) \setminus \{1\}$.

Wir stellen zunächst alle Faktoren als Laurentreihe um $z_0 = 1$ dar. Der Faktor

$$\frac{1}{z-1}$$

ist bereits eine Laurentreihe. Zudem ist

$$z = (z-1) + 1$$

und

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{(z-1)+1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \right) (z-1)^n \\ &= -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+2}} (z-1)^n \end{aligned}$$

als Laurentreihendarstellung.

(c) $f(z) := \dfrac{(\mathrm{e}^z - 1)^2}{(z-1)^2}$, $z_0 := 1$. (2)

Lösung: Zur Berechnung kann man beispielsweise

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^z - 1)^2 &= \mathrm{e}^{2z} - 2\,\mathrm{e}^z + 1 = \mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{2(z-1)} - 2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{z-1} + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^2\,2^n (z-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{e}(z-1)^n}{n!} + 1 \\ &= (\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e} + 1) + 2\,\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)(z-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{e}(2^{n+1}\,\mathrm{e} - 1)}{(n+2)!}(z-1)^{n+2}\end{aligned}$$

ausnutzen und erhält

$$f(z) = \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{(z-1)^2} + \frac{2\,\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{e}(2^{n+1}\,\mathrm{e}-1)}{(n+2)!}(z-1)^n$$

als Laurentreihendarstellung. Die Laurentreihe konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

17. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und seien f, g und h holomorphe Funktionen auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $\operatorname{ord}(f; z_0) \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ord}(g; z_0) \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ord}(h; z_0) = -\infty$. Zeige:

(a) $\operatorname{ord}(fg; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0)$; (1)

Lösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Funktion f genau dann die endliche Ordnung $m := \operatorname{ord}(f; z_0) \in \mathbb{Z}$ in z_0 hat, wenn es eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion f_0 mit $f(z) = (z - z_0)^m f_0(z)$ gibt, die $f_0(z_0) \neq 0$ erfüllt. Andererseits ist $\operatorname{ord}(f; z_0) = \infty$ genau für $f \equiv 0$, was hier ausgeschlossen ist. Zudem ist $\operatorname{ord}(f; z_0) = -\infty$ genau dann, wenn f in z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Für den Beweis sei nun $m := \operatorname{ord}(f; z_0)$ und $n := \operatorname{ord}(g; z_0)$. Wir schreiben $f(z) = (z - z_0)^m f_0(z)$ und $g(z) = (z - z_0)^n g_0(z)$. Dann ist für $h_0(z) := f_0(z) g_0(z)$ also

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^{m+n} h_0(z)$$

und $h_0(z_0) \neq 0$, was nach der einführenden Bemerkung die Behauptung zeigt.

(b) $\operatorname{ord}(\frac{f}{g}; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) - \operatorname{ord}(g; z_0)$; (1)

Lösung: Laut Vorlesung ist $\operatorname{ord}(\frac{1}{g}; z_0) = -\operatorname{ord}(g; z_0)$. Zusammen mit dem vorigen Aufgabenteil zeigt dies die Behauptung.

(c) $\operatorname{ord}(fh; z_0) = -\infty$; (2)

Lösung: Hätte fh keine wesentliche Singularität, wäre also $\operatorname{ord}(fh; z_0) \in \mathbb{Z}$, so wäre nach dem vorigen Aufgabenteil

$$\operatorname{ord}(h; z_0) = \operatorname{ord}(\tfrac{fh}{f}; z_0) = \operatorname{ord}(fh; z_0) - \operatorname{ord}(f; z_0) \in \mathbb{Z}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

(d) $\operatorname{ord}(f + g; z_0) \geq \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$; (1)

Lösung: Schreibt man

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

so ist

$$(f + g)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Sei nun $n_0 := \min\{\mathrm{ord}(f;z_0), \mathrm{ord}(g;z_0)\}$ und $n < n_0$. Dann ist $n < \mathrm{ord}(f;z_0)$ und $n < \mathrm{ord}(g;z_0)$ und daher $a_n = 0$ und $b_n = 0$, also auch $c_n = 0$. Daraus folgt $\mathrm{ord}(f+g) \geq n_0$ nach Definition der Ordnung.

(e) Im Allgemeinen ist $\mathrm{ord}(f+g;z_0) \neq \min\{\mathrm{ord}(f;z_0), \mathrm{ord}(g;z_0)\}$; (1)

Lösung: Ein Beispiel ist $f(z) := 1+z$ und $g(z) := -1$. Dann ist $\mathrm{ord}(f;0) = 0$ und $\mathrm{ord}(g;0) = 0$, aber $\mathrm{ord}(f+g;0) = 1$.

(f) Ist $\mathrm{ord}(f;z_0) \neq \mathrm{ord}(g;z_0)$, so gilt $\mathrm{ord}(f+g;z_0) = \min\{\mathrm{ord}(f;z_0), \mathrm{ord}(g;z_0)\}$. (1)

Lösung: Schreibt man

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

und

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

so ist

$$(f+g)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n+b_n)(z-z_0)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Sei nun $n_0 := \min\{\mathrm{ord}(f;z_0), \mathrm{ord}(g;z_0)\}$, und ohne Einschränkung sei $n_0 = \mathrm{ord}(f;z_0)$. Dann ist $n_0 < \mathrm{ord}(g;z_0)$ nach Voraussetzung an die Ordnungen. Also gilt $a_{n_0} \neq 0$ und $b_{n_0} = 0$, also $c_{n_0} = a_{n_0} \neq 0$, was nach Definition der Ordnung $\mathrm{ord}(f+g;z_0) \leq n_0$ zeigt. Die Ungleichung $\mathrm{ord}(f+g;z_0) \geq n_0$ gilt allgemein. Insgesamt haben wir also die Behauptung $\mathrm{ord}(f+g;z_0) = n_0$ gezeigt.

18. Gib die Art der Singularität von f bei z_0 an und bestimme $\mathrm{ord}(f;z_0)$:

(a) $f(z) := \dfrac{1}{\sin^{13} z}$, $z_0 := 0$; (1)

Lösung: Da $\sin z$ in $z=0$ eine Nullstelle erster Ordnung hat, wie man aus der Potenzreihendarstellung ablesen kann, hat $\sin^{13} z$ nach der vorigen Aufgabe eine Nullstelle dreizehnter Ordnung. Nach der vorigen Aufgabe (oder nach Skript) folgt $\mathrm{ord}(f;0) = -13$.

(b) $f(z) := \dfrac{z^2(z-1)^2}{\mathrm{e}^{z-1} - 1}$, $z_0 := 1$; (1)

Lösung: Die Funktion $\mathrm{e}^{z-1} - 1$ hat eine Nullstelle erster Ordnung in 1, wie man sofort aus der Potenzreihendarstellung ablesen kann, oder wie man daran sieht, dass die Ableitung dort nicht verschwindet. Weil $z^2(z-1)^2$ in 1 eine Nullstelle zweiter Ordnung hat, folgt mit dem vorigen Aufgabenteil $\mathrm{ord}(f;1) = 1$; die Funktion hat also eine Nullstelle erster Ordnung.

(c) $f(z) := \dfrac{z^7+1}{z^7} + \dfrac{\sin(z)\cos(z)}{z^6}$, $z_0 := 0$; (1)

Lösung: Der erste Summand hat einen holomorphen Zähler, der in 0 keine Nullstelle hat, und einen Nenner mit Nullstelle der Ordnung sieben in 0. Also hat dieser Summand einen Pol siebter Ordnung in 0. Weil der zweite Summand höchstens einen Pol sechster Ordnung hat (eigentlich sogar einen Pol fünfter Ordnung), folgt $\mathrm{ord}(f;0) = -7$, also dass f einen Pol siebter Ordnung besitzt.

(d) $f(z) := \sin\frac{1}{z}$, $z_0 := 0$. (1)

Lösung: Die Laurentreihendarstellung ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(-2n+1)!} z^{2n-1},$$

und man sieht insbesondere, dass unendlich viele der Koeffizienten zu negativen Potenzen nicht verschwinden. Laut Vorlesung ist 0 somit eine wesentliche Singularität.