



Elementare Funktionentheorie: Blatt 6

19. Bestimme das Residuum $\text{Res}_{z_0} f$ für jede isolierte Singularität z_0 der Funktion f und gib jeweils die Windungszahl $\chi(\gamma; z_0)$ an! Bestimme zudem den Wert von $\int_{\gamma} f(z) dz$:

(a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4 - \pi^2 z^2}$, $\gamma = \partial B_{42}(0)$; (3)

(b) $f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{z^2 + 4z + 4}$, $\gamma(t) = 5 \cos(t) + 5i \sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$; (3)

(c) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, $\gamma = \partial B_4(0)$; (3)

(d) $f(z) = e^{1/z}$, $\gamma = \partial B_5(2 + 3i)$. (3)

Hinweis: Wie üblich sollen Kreislinien hier positiv (d.h. gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Die Windungszahlen müssen nicht berechnet werden, sondern dürfen aus einer Skizze abgelesen werden.

20. Berechne den Wert folgender Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$; (3)

(b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$; (3)

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{2ix}}{1+x^4} dx$; (3)

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. (3)

Tipp: $\cos x = \text{Re } e^{ix}$