Universität Ulm

Freitag, 08.10.2010, 10:00–12:00

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 60

Lösungen Elementare Funktionentheorie: Klausur 2

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z^2-\pi^2)^4}{\sin(z)^2(z^2+\pi^2)^4}$$

und untersuchen Sie den Typ ihrer isolierten Singularitäten, bei hebbaren Singularitäten und Polstellen inklusive Bestimmung der Ordnung! (10)

Lösung: Offenbar ist die Funktion f nur dort nicht definiert, wo $\sin(z) = 0$ oder $z^2+\pi^2 = 0$ gilt. Der maximale Definitionsbereich von f ist also

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \big(\{\pi i, -\pi i\} \cup \pi\mathbb{Z}\big).$$

Wir untersuchen nun der Reihe nach die isolierten Singularitäten von f.

Im Punkt $z = 0$ haben z und $\sin(z)$ jeweils eine Nullstelle erster Ordnung, während die übrigen Terme dort keine Singularität haben. Insgesamt ist $z = 0$ also eine hebbare Singularität, aber keine Nullstelle der fortgesetzten Funktion (bzw. eine Nullstelle nullter Ordnung).

In den Punkten $z = \pm\pi i$ hat $z^2 + \pi^2$ eine Nullstelle erster Ordnung, während alle anderen auftretenden Terme keine Singularität besitzen. Also hat f an diesen beiden Stellen jeweils einen Pol vierter Ordnung.

In den Punkten $z = \pm\pi$ haben $\sin(z)$ und $z^2 - \pi^2$ jeweils eine Nullstelle erster Ordnung (die jeweilige Ableitung verschwindet nicht). Die restlichen Terme haben dort keine Singularität. Insgesamt sind diese beiden Singularitäten also jeweils hebbar zu einer Nullstelle zweiter Ordnung.

In den Punkten der Form $z = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ hat $\sin(z)$ eine Nullstelle erster Ordnung, die anderen Terme aber keine Singularitäten. Dort liegen also jeweils Polstellen von f zweiter Ordnung.

2. Bestimmen Sie die Anzahl der Laurentreihendarstellungen der Funktion

$$f(z) := \frac{z-2}{z^2(1-z)}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, geben Sie diese an, und bestimmen Sie jeweils deren Konvergenzgebiet! (10)

Lösung: Aus der in der Vorlesung behandelten Theorie der Laurentreihen ist bekannt, dass jede solche Darstellung einem Kreisring mit Mittelpunkt $z_0 = 0$ im maximalen Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ von f entspricht und dass die jeweilige Laurentreihe genau auf diesem Kreisring konvergiert. Es gibt in diesem Beispiel also genau zwei Darstellungen von f als Laurentreihe, nämlich die zum Kreisring $R_1 := B_1(0) \setminus \{0\}$ und die zum Kreisring $R_2 := \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ gehörende.

Auf R_1 ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Reihe die Darstellung

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} = -2z^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n,$$

also $a_n = 0$ für $n \leq -3$, $a_{-2} = -2$ und $a_n = -1$ für $n \geq -1$.

Ähnlich erhält man auf R_2

$$f(z) = -\frac{z-2}{z^3} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\frac{z-2}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3} = \sum_{n=-\infty}^{-3} z^n - z^{-2},$$

also $a_n = 1$ für $n \leq -3$, $a_{-2} = -1$ und $a_n = 0$ für $n \geq -1$.

3. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$! (10)

Lösung: Wir definieren $P(z) := 1 + z$, $Q(z) := 1 + z^2$ und $f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \mathrm{e}^{2iz}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Integral existiert und dass man es mittels

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\Big(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z(f)\Big)$$

berechnen kann. Die einzige Nullstelle von Q in der oberen Halbebene ist die einfache Nullstelle $z_0 = i$, und somit ist der Pol $z_0 = i$ erster Ordnung die einzige Singularität von f in der oberen Halbebene. Laut Vorlesung ist dann

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \mathrm{e}^{2iz_0} = \frac{1+i}{2i} \mathrm{e}^{-2} = \frac{1-i}{2\,\mathrm{e}^2}.$$

Insgesamt ergibt sich hieraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\Big(2\pi i \cdot \frac{1-i}{2\,\mathrm{e}^2}\Big) = \operatorname{Im} \frac{2\pi i + 2\pi}{2\,\mathrm{e}^2} = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}.$$

4. Formulieren und beweisen Sie den Riemann'schen Hebbarkeitssatz! (10)

Lösung: Satz: Sei z_0 eine isolierte Singularität von f, also $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f sei bei z_0 beschränkt, es gebe also $c \geq 0$ und $R > 0$ mit $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in \Omega$ mit $0 < |z - z_0| \leq R$. Dann besitzt f eine holomorphe Fortsetzung in z_0.

Erster Beweis: Indem wir R gegebenenfalls etwas kleiner wählen, können wir $B_{2R}(z_0) \subset \Omega$ annehmen. Sei $f(z) = g(z) + h(1/(z - z_0))$ die Laurentzerlegung von f in holomorphe Funktionen $g\colon B_{2R}(z_0) \to \mathbb{C}$ und $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei $h(0) = 0$ ist (im Satz über die Laurentzerlegung kann man hier $r = 0$ wählen). Weil g auf $\overline{B_R(z_0)}$ stetig ist, gibt es $M \geq 0$ mit $|g(z)| \leq M$ für $|z - z_0| \leq R$. Dann ist unter Verwendung der Voraussetzung

$$|h(z)| \leq |f(\tfrac{1}{z} + z_0)| + |g(\tfrac{1}{z} + z_0)| \leq c + M$$

für $|(\frac{1}{z} + z_0) - z_0| \leq R$, also für $|z| \geq \frac{1}{R}$. Weil h wegen Stetigkeit auch auf $\overline{B_{1/R}(0)}$ beschränkt ist, ist h eine beschränkte, ganze Funktion und somit nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen $h(0) = 0$ folgt hiermit $h \equiv 0$, also $f \equiv g$ in einer Umgebung von z_0. Somit ist g eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Fortsetzung von f.

Zweiter Beweis: Betrachte $g(z) := (z - z_0)^2 f(z)$. Da f beschränkt ist, definiert $g(z_0) := 0$ eine stetige Fortsetzung von g in den Punkt z_0. Zudem gilt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z) \to 0 \quad (z \to z_0),$$

was zeigt, dass g im Punkt $z = z_0$ komplex differenzierbar mit Ableitung $g'(z_0) = 0$ ist. Folglich ist g eine holomorphe Funktion auf Ω, die wegen $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ eine Potenzreihendarstellung der Form

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

besitzt, die in einer Umgebung von z_0 konvergiert. Also ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-z_0)^n$$

eine Darstellung von f in einer punktierten Umgebung von z_0, und die rechte Seite lässt sich offenbar holomorph in den Punkt $z = z_0$ fortsetzen.

5. Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild von f in $\mathbb{C}$ dicht liegt! (10)
Tipp: Man kann ähnlich wie beim Satz von Weierstraß-Casorati argumentieren.

Lösung: Sei f eine ganze Funktion, deren Bild nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. Wir müssen zeigen, dass f konstant ist. Es gibt $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $B_r(w) \subset (\operatorname{Rg} f)^c$, also $|w - f(z)| \geq r$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also definiert $g(z) := \frac{1}{w-f(z)}$ eine ganze Funktion mit $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für $z \in \mathbb{C}$. Weil die Funktion g beschränkt ist, ist sie nach dem Satz von Liouville konstant. Daher ist auch $f(z) = w - \frac{1}{g(z)}$ konstant, was die Behauptung zeigt; beachte, dass $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ nach Definition von g klar ist.

6. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (10)

(1) Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ sternförmig, $z_0 \notin \Omega$ und γ ein geschlossener Weg in Ω, so gilt für die Windungszahl $\chi(\gamma; z_0)$ von γ um z_0 die Gleichung $\chi(\gamma; z_0) = 0$.

Lösung: Richtig: Weil die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ auf Ω holomorph ist, ist nach dem Cauchy'schen Integralsatz für sternförmige Gebiete

$$\chi(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 0.$$

(2) Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt die Funktion f ihr Maximum auf dem Rand von Ω an in dem Sinne, dass $\sup_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ gilt, wobei auf beiden Seiten auch der Wert ∞ zugelassen ist.

Lösung: Falsch: Die Funktion $f(z) := \mathrm{e}^z$ ist ein Gegenbeispiel. Jeder Punkt $z \in \partial\Omega$ ist von der Form $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$, und daher ist in diesem Beispiel $|f(z)| = 1$ auf $\partial\Omega$. Aus $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^t$ folgt aber andererseits $\sup_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \infty$.

(3) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f besitze eine Stammfunktion F auf Ω. Sei γ ein geschlossener Weg in Ω. Dann ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Lösung: Richtig: Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ eine differenzierbare Parametrisierung der Kurve. Dann gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ und daher nach Definition des Kurvenintegrals und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

wobei in der letzten Gleichung benutzt wurde, dass γ geschlossen ist. Hierbei wurde verwendet, dass γ nach Definition eines Weges eine differenzierbare Parametrisierung besitzt. Ist γ nur ein rektifizierbarer Weg, bleibt die Behauptung allerdings ebenfalls richtig, was man mit einem Approximationsargument zeigen kann.

(4) Seien f und g ganze Funktionen. Es gebe eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit unendlich vielen Elementen, für die $f(z) = g(z)$ für alle $z \in A$ gilt. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösung: Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $f(z) := 0$, $g(z) := \sin(z)$ und $A := \pi\mathbb{Z}$.

(5) Ist $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $z = 0$ eine wesentliche Singularität von f und $\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, so ist $\mathrm{Res}_0(f) = 0$.

Lösung: Richtig: Für $\gamma \coloneqq \partial B_1(0)$ folgt mit dem Residuensatz

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \chi(\gamma;0)\,\mathrm{Res}_0(f) = \mathrm{Res}_0(f),$$

also die Behauptung.