Universität Ulm

Mittwoch, 05.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+4

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 2

5. Bestimme eine maximale Lösung folgender Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = 2\cos(t)\sin(t)y(t) + \mathrm{e}^{-\cos^2(t)}$, $y(0) = 3$; (2)

(b) $y'(t) = (1 + t^2)y(t)^2$, $y(0) = \frac{3}{4}$; (2)

(c) $y'(t) = \frac{1}{1+\tan^2(y(t))}$, $y(0) = \pi$; (2)

(d) $t^2 y'(t) = ty(t) + y(t)^2$, $y(1) = 1$; (2)
Tipp: Betrachte $z(t) \coloneqq \frac{y(t)}{t}$.

6. Sei $0 < \alpha < 1$. Zeige:

(a) Für alle $-\infty \le c \le d \le \infty$ ist

$$y_{c,d}(t) \coloneqq \begin{cases} -\big((1-\alpha)(c-t)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \le c, \\ 0, & c < t < d \\ \big((1-\alpha)(t-d)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & t \ge d, \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = |y(t)|^\alpha$. (2)
Hinweis: Insbesondere ist $y_{c,d} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ zu zeigen.

(b) *Bonusaufgabe:* Sei $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $y'(t) = |y(t)|^\alpha$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $-\infty \le c \le d \le \infty$ mit $y(t) = y_{c,d}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (+2)

7. *Die logistische Gleichung:* Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(t) = ry(t)(1 - \frac{y(t)}{K})$, $y(0) = y_0$ mit festen Parametern $r > 0$, $K > 0$ und $y_0 > 0$.

(a) Skizziere für $r = 1$ und $K = 2$ das zu dieser Differentialgleichung gehörende Richtungsfeld im Bereich $t \in [0, 5]$ und $y \in [0, 5]$! (2)

(b) Bestimme die eindeutige Lösung das Anfangswertproblems in Abhängigkeit der Parameter und des Anfangswerts und bestimme das maximale Lösungsintervall! (2)

(c) Für welche Parameter und Anfangswerte konvergiert die Lösung y für $t \to \infty$? Was ist in diesen Fällen der Grenzwert? (2)

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $y'(t) = f(y(t))$ auf einem offenen Intervall I. Zeige:

(a) Die Funktion $t \mapsto F(y(t))$ ist monoton wachsend. (2)

(b) Gibt es Punkte $t_1 < t_2$ in I mit $F(y(t_1)) = F(y(t_2))$, so gilt $y(t_1) = y(t) = y(t_2)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$. (2)

(c) *Bonusaufgabe:* Die Funktion y ist auf I monoton. (+2)