



---

## Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 4

---

13. *Lösungsgesamtheit für die Differentialgleichung  $y''(t) = y(t)$* : In dieser Aufgabe werden zuerst durch einen Potenzreihenansatz Lösungen von  $y''(t) = y(t)$  bestimmt. Danach wird gezeigt, dass die gefundenen Lösungen bereits alle Lösungen dieser Gleichung darstellen. Zeige:

- (a) Sei  $y$  eine Lösung von  $y''(t) = y(t)$  auf  $\mathbb{R}$ . Wir nehmen an, dass  $y$  in 0 *analytisch* ist, also dass es eine Folge  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  reeller Zahlen und einen Radius  $R > 0$  gibt, mit denen  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  für alle  $t$  mit  $|t| < R$  gilt. Dann ist  $(k+2)(k+1)a_{k+2} = a_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . (2)

**Lösung:** Aus den Grundvorlesungen ist bekannt, wie man die Ableitung von Potenzreihen berechnet. Es ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = y(t) = y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} t^k$$

für alle  $|t| < R$ . Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt, dass dann die Koeffizienten der beiden Potenzreihen übereinstimmen müssen, was gerade die Behauptung dieses Aufgabenteils ist.

- (b) Sei  $y$  eine in 0 analytische Lösung von  $y''(t) = y(t)$  und  $R$  ein Radius, innerhalb dessen die entsprechende Potenzreihe um  $t = 0$  konvergiert und die Funktion darstellt. Ist  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 1$ , so ist  $y(t) = e^t$  für  $|t| < R$ . Ist  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = -1$ , so ist  $y(t) = e^{-t}$  für  $|t| < R$ . (2)

**Lösung:** Sei zuerst  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 1$ , d.h.  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 1$ . Wir zeigen per Induktion  $a_k = \frac{1}{k!}$ . Für  $k = 0$  und  $k = 1$  ist dies gerade die Voraussetzung. Sei die Behauptung bis zu einem  $k+1 \in \mathbb{N}$  richtig. Dann ist nach dem vorigen Aufgabenteil

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{(k+2)(k+1)k!} = \frac{1}{(k+2)!},$$

was den Induktionsschritt zeigt. Somit ist  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$ , wo immer diese Reihendarstellung richtig ist, also zumindest für  $|t| < R$ .

Sei nun  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = -1$ . Wir zeigen per Induktion  $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ . Für  $k = 0$  und  $k = 1$  ist dies wiederum die Voraussetzung, und für  $k \geq 0$  gilt dann im Induktionsschritt

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)} = \frac{(-1)^k}{(k+2)(k+1)k!} = \frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)!},$$

was zu  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = e^{-t}$  führt.

- (c) Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $y(t) := ae^t + be^{-t}$  eine Lösung von  $y''(t) = y(t)$ . (1)

**Lösung:** klar durch Nachrechnen

- (d) Für alle  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  gibt es genau eine Funktion  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die zweimal stetig differenzierbar ist und  $y''(t) = y(t)$ ,  $y(0) = y_0$  und  $y'(0) = y_1$  erfüllt. (2)

**Lösung:** Dies ist Satz (6.1) aus der Vorlesung. Genauer gesagt ist die Gleichung mittels  $z(t) := (y(t), y'(t))^T$  äquivalent zum System

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z(t)$$

mit Anfangsbedingung  $z(0) = (y_0, y_1)^T$ . Weil dieses System eine global Lipschitz-stetige rechte Seite hat, greift der Existenz- und Eindeigkeitssatz.

- (e) Ist  $y$  eine Lösung von  $y''(t) = y(t)$  auf  $\mathbb{R}$ , so gibt es  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $y(t) = ae^t + be^{-t}$ . (2)

**Lösung:** Setze  $y_0 := y(0)$  und  $y_1 := y'(0)$ . Definiere nun  $a := \frac{y_0 + y_1}{2}$  und  $b := \frac{y_0 - y_1}{2}$  und setze  $z(t) := ae^t + be^{-t}$ . Dann gilt  $z''(t) = z(t)$ , und man rechnet  $z(0) = a + b = y_0$  und  $z'(0) = a - b = y_1$  nach. Nach dem vorigen Aufgabenteil muss dann  $y = z$  gelten, also  $y(t) = z(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , was gerade die Behauptung war.

14. Um das Anfangswertproblem  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = y_0$  zu lösen, betrachten wir wie in der Vorlesung die *Picard-Iterierten*

$$y_0(t) := y_0 \quad \text{und} \quad y_{n+1}(t) := y_0 + \int_0^t f(s, y_n(s)) \, ds$$

für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- (a) Sei  $f(t, z) = z + t$  und  $y_0 = 0$ . Zeige, dass  $y_n(t) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt, und berechne unter Verwendung dieser Information die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems  $y'(t) = y(t) + t$ ,  $y(0) = 0!$  (3)

**Lösung:** Wir zeigen die Aussage per vollständiger Induktion. Für  $n = 0$  ist die Aussage per Konvention richtig, da die leere Summe als 0 definiert ist. Alternativ könnte man den Induktionsanfang aber auch mit  $n = 1$  starten.

Sei die Aussage nun für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  richtig. Dann ist

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t (y_n(s) + s) \, ds = \sum_{k=2}^{n+1} \int_0^t \frac{s^k}{k!} \, ds + \int_0^t s \, ds = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{t^2}{2} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{t^k}{k!},$$

womit der Induktionsschritt gemacht ist.

Weil laut Vorlesung  $y_n$  (sogar gleichmäßig auf kompakten Mengen) gegen die eindeutige Lösung  $y$  des Anfangswertproblems konvergiert, folgt

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - t - 1 = e^t - t - 1$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Es ist nicht nötig, nachzuprüfen, dass  $y$  tatsächlich eine Lösung ist, da dies von der Theorie bereits garantiert wird. Nebenbei bemerkt ist die Konvergenz nicht gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- (b) Sei  $f(t, z) = z^2$  und  $y_0 = 1$ . Bestimme  $y_k$  für  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  und zeichne diese Funktionen und die exakte Lösung des Anfangswertproblems  $y'(t) = y(t)^2$ ,  $y(0) = 1$  in ein gemeinsames Schaubild ein!

**Hinweis:** Wähle für die  $t$ -Achse das Intervall  $[0, 1]$  und für die  $y$ -Achse das Intervall  $[1, 4]$ . (3)

**Lösung:** Im Schaubild ist

$$y_0(t) = 1$$

rot,

$$y_1(t) = 1 + t$$

grün,

$$y_2 = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t + 1$$

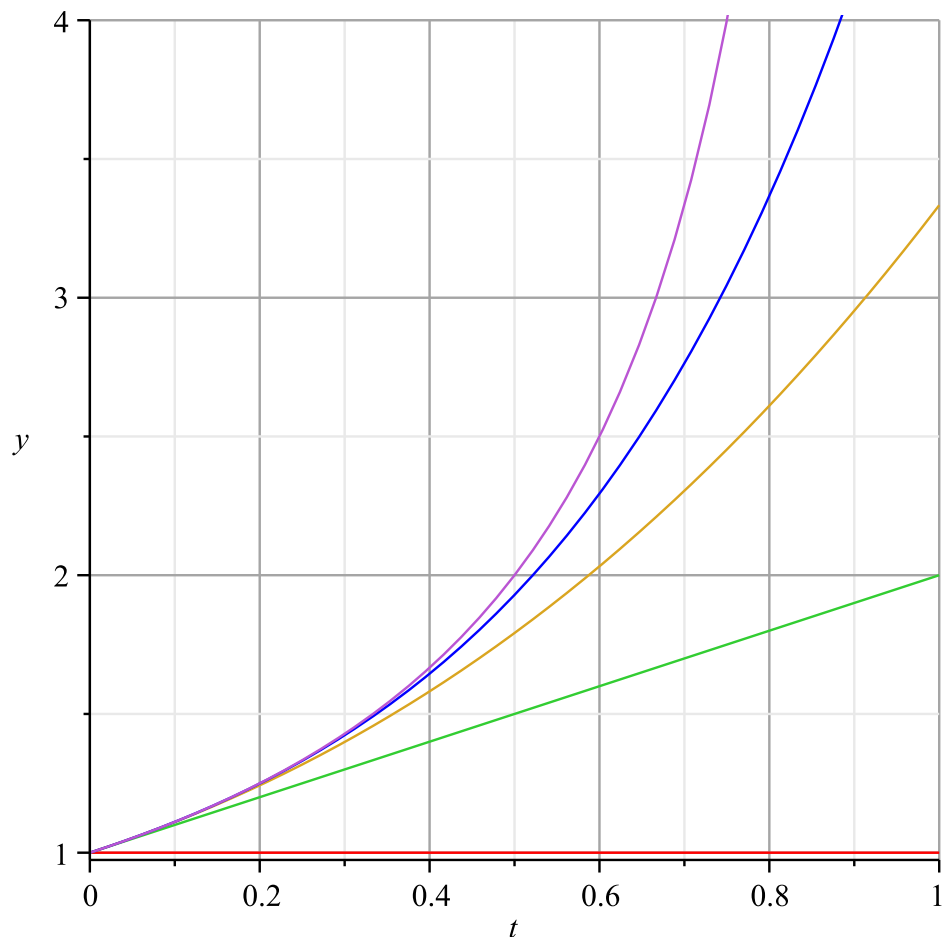
gelb,

$$y_3(t) = \frac{1}{63}t^7 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{2}{3}t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$$

blau und die exakte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

lila eingezeichnet.



15. *Differentialgleichungen erster Ordnung genügen:* Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , und sei  $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$ . Zeige:

(a) Definiere  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$g_i(t, u_0, \dots, u_{n-1}) = \begin{cases} u_{i+1}, & i = 0, \dots, n-2, \\ f(t, u_0, \dots, u_{n-1}), & i = n-1, \end{cases}$$

wobei  $g = (g_0, \dots, g_{n-1})^T$  sei, und  $z: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$z(t) := (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T$$

gegeben ist. Eine Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ , ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(AWP) \begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

wenn  $z$  das Anfangswertproblem  $z'(t) = g(t, z(t))$ ,  $z(t_0) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  löst. (3)

**Lösung:** Sei zuerst  $y$  eine Lösung. Wir müssen  $z'_i(t) = g_i(t, z(t))$  für alle  $i = 0, \dots, n-1$  zeigen. Für  $i \neq n-1$  ist

$$z'_i(t) = (y^{(i)})'(t) = y^{(i+1)}(t) = z_{i+1}(t) = g_i(t, z_1(t), \dots, z_n(t)) = g(t, z(t))$$

für alle  $t \in I$ . Im Fall  $i = n-1$  ist

$$\begin{aligned} z'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) = y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= g_{n-1}(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = g_{n-1}(t, z(t)) \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insgesamt haben wir  $z'(t) = g(t, z(t))$  gezeigt.

Sei nun  $z$  eine Lösung. Dann gilt insbesondere

$$y^{(n)}(t) = z'_{n-1}(t) = g_{n-1}(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),$$

was bedeutet, dass  $y$  eine Lösung ist.

- (b) Ist  $f$  stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig, so besitzt (AWP) eine eindeutige Lösung auf einem maximalen Lösungsintervall. (2)

**Lösung:** Die Funktionen  $g_0, g_1, \dots, g_{n-2}$  sind Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Also ist  $g$  (komponentenweise) stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig. Somit besitzt das Problem  $z'(t) = g(t, z(t))$ ,  $z(t_0) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  genau eine Lösung, was nach dem vorigen Aufgabenteil beweist, dass (AWP) höchstens eine Lösung besitzen kann.

Sei nun  $z$  die Lösung von  $z'(t) = g(t, z(t))$ ,  $z(t_0) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  und setze  $y := z_0$ . Wir zeigen per Induktion  $y^{(i)} = z_i$  für  $i = 0, \dots, n-1$ . Für  $i = 0$  ist dies die Definition von  $y$ . Ist die Aussage für ein  $i \leq n-2$  richtig, so gilt nach Induktionshypothese und Definition von  $z$  auch

$$y^{(i+1)}(t) = (y^{(i)})'(t) = z'_i(t) = g_i(t, z(t)) = z_{i+1}(t),$$

was zeigt, dass die Behauptung dann auch für  $i+1$  richtig ist. Also gilt  $z(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T$ ,  $z'(t) = g(t, z(t))$  und  $z(t_0) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ . Nach dem vorigen Aufgabenteil zeigt dies, dass  $y$  eine Lösung von (AWP) ist.

Weil  $y$  offenbar genau dann maximal ist, wenn  $z$  maximal ist, haben wir hiermit die Behauptung bewiesen.