Universität Ulm

Mittwoch, 26.05.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 20+3

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 5

16. Löse folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; (2)

Lösung: Laut Vorlesung sind für die Lösung der Gleichung die Nullstellen des Polynoms $x^2 + 2x + 4 = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})$ zu untersuchen.

Da diese Nullstellen nicht reell sind, ist laut Vorlesung $y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(\sqrt{3}t)$ und $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(\sqrt{3}t)$ ein Fundamentalsystem der Gleichung. Mit $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = \sqrt{3}$, $y_2(0) = 1$ und $y_2'(0) = -1$ kommt man durch Linearkombination auf die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t}\sin(\sqrt{3}t)$$

des Anfangswertproblems.

Eindeutigkeit der Lösung und $I = \mathbb{R}$ folgen aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(b) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; (2)

Lösung: Laut Vorlesung sind für die Lösung der Gleichung die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ zu untersuchen.

Da dieses Polynom die doppelte Nullstelle 2 hat, ist laut Vorlesung $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$ und $y_2(t) = t\mathrm{e}^{2t}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Beachten wir noch $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 2$, $y_2(0) = 0$ und $y_2'(t) = 1$, so sieht man leicht, dass die Linearkombination

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t} - 3t\mathrm{e}^{2t} = (1 - 3t)\mathrm{e}^{2t}$$

zusätzlich die Anfangsbedingung erfüllt.

Eindeutigkeit der Lösung und $I = \mathbb{R}$ folgen aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$; (2)

Lösung: Laut Vorlesung sind für die Lösung der Gleichung die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ zu untersuchen.

Da diese Nullstellen voneinander verschieden sind, ist laut Vorlesung $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ und $y_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also von der Form $y(t) = a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{3t}$, wobei $y(0) = a + b = 6$ und $y'(0) = a + 3b = 0$ gelten soll. Dies ist genau für $a = 9$ und $b = -3$ erfüllt. Die Lösung ist also

$$y(t) = 9\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{3t}.$$

Eindeutigkeit der Lösung und $I = \mathbb{R}$ folgen aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(d) $y''(t) - 2\cos(t)y'(t) + (\sin(t) + \cos^2(t))y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; (3)

Tipp: Eine Lösung der Differentialgleichung (nicht aber des Anfangswertproblems) ist $y_1(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}$.

Lösung: Die Gleichung ist von der Form

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

mit $p(t) = -2\cos(t)$ und $q(t) = \sin(t)+\cos^2(t)$. Wie in der Vorlesung machen wir den Ansatz $y(t) = y_1(t)v(t)$ für die allgemeine Lösung der Gleichung mit einer Funktion v, für die

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0$$

gilt. Mit $u \coloneqq v'$ ist dann also

$$u'(t) = -\big(2\tfrac{y_1'(t)}{y_1(t)} + p(t)\big)u(t) = 0$$

was $u(t) \equiv \text{const}$ und somit

$$v(t) = at + b$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ zeigt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$y(t) = y_1(t)v(t) = (at+b)\mathrm{e}^{\sin(t)}.$$

Dann ist

$$y'(t) = a\mathrm{e}^{\sin(t)} + (at+b)\mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t).$$

Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss also $b = 0$ und $a + b = 1$ sein. Man rechnet nun leicht nach, dass

$$y(t) = t\mathrm{e}^{\sin(t)}$$

tatsächlich eine Lösung ist. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist diese Lösung die eindeutige Lösung auf $I = \mathbb{R}$.

(e) $y''(t) - 2\cos(t)y'(t) + (\sin(t) + \cos^2(t))y(t) = 2\mathrm{e}^{\sin(t)}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (3)

Lösung: Sei wie im vorigen Aufgabenteil

$$y_1(t) \coloneqq \mathrm{e}^{\sin(t)}.$$

Sei zudem y_2 die Lösung im vorigen Aufgabenteil, also

$$y_2(t) \coloneqq t\mathrm{e}^{\sin(t)}.$$

Dann ist

$$y_1'(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t)$$

und

$$y_2'(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(1 + t\cos(t)),$$

also insbesondere $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ und $y_2'(0) = 1$. Somit hat die Wronski-Determinante

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \mathrm{e}^{2\sin(t)}(1 + t\cos(t) - \cos(t)t) = \mathrm{e}^{2\sin(t)}$$

bei $t = 0$ den Wert

$$w(0) = 1 \neq 0.$$

Laut Vorlesung bilden y_1 und y_2 also ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung; man hätte den Funktionen aber auch direkt ansehen können, dass sie linear unabhängig sind.

Bezeichnen wir mit $g(t) \coloneqq 2\mathrm{e}^{\sin(t)}$ die rechte Seite. Laut Vorlesung kann man die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems dann als

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

schreiben, wobei die Ableitungen der Funktionen u_1 und u_2 durch

$$u_1'(t) = -\frac{g(t)y_2(t)}{w(t)} = -2t$$

und

$$u_2'(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{w(t)} = 2$$

gegeben sind. Somit ist $u_1(t) = -t^2 + a$ und $u_2(t) = 2t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, was zur allgemeinen Lösung

$$y(t) = (-t^2 + a)\mathrm{e}^{\sin(t)} + (2t + b)t\mathrm{e}^{\sin(t)} = t^2\mathrm{e}^{\sin(t)} + (at + b)\mathrm{e}^{\sin(t)}$$

führt, was (natürlich) von der gleichen Form wie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist, aber verschoben um eine partikuläre Lösung.

Indem man beachtet, dass die Ableitung der partikulären Lösung $t^2\mathrm{e}^{\sin(t)}$ durch $\mathrm{e}^{\sin(t)}(2t + t^2\cos(t))$ gegeben ist, erhält man für die allgemeine Lösung leicht $y(0) = b$ und $y'(t) = a + b$ wie bereits im homogenen Fall. Wir müssen also zur Erfüllung der Anfangsbedingung $b = -1$ und $a = 2$ wählen. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = (t^2 + 2t - 1)\mathrm{e}^{\sin(t)}.$$

Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert die Eindeutigkeit der Lösung und $I = \mathbb{R}$ als maximales Lösungsintervall.

17. *Freier Fall:* Ein punktförmiger Körper mit Masse $m > 0$ werde in einer Höhe $h_0 > 0$ aus der Ruhe heraus fallengelassen. Die Erdbeschleunigung sei $g > 0$ und es gebe keine Reibung, sodass die Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bis zum Aufschlagszeitpunkt t_0 (also $h(t_0) = 0$) die Differentialgleichung $mh''(t) = -mg$ erfüllt.

(a) Sei $E_{\text{kin}}(t) := \frac{1}{2}mh'(t)^2$ die kinetische Energie und $E_{\text{pot}}(t) := mgh(t)$ die potentielle Energie des Körpers. Zeige den *Energieerhaltungssatz* $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv \text{const.}$ für $0 \leq t \leq t_0$! (2)

Lösung: Nach den Rechenregeln für Ableitungen und weil h die Differentialgleichung erfüllt ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)) = mh'(t)h''(t) + mgh'(t) = -mgh'(t) + mgh'(t) = 0.$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Berechne die Aufprallgeschwindigkeit $h'(t_0)$! (1)

Lösung: Die Anfangsbedingung lautet $h(0) = h_0$ und $h'(0) = 0$.
Man kann h damit als $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ bestimmen. Daraus ergibt sich

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

und somit

$$h'(t_0) = -gt_0 = -\sqrt{2h_0 g}.$$

Alternativ hierzu beobachtet man $E_{\text{kin}}(0) = 0$ nach Anfangsbedingung und $E_{\text{pot}}(t_0) = 0$. Also ist nach der vorigen Teilaufgabe

$$\frac{1}{2}mh'(t_0)^2 = E_{\text{kin}}(t_0) = E_{\text{pot}}(0) = mgh_0,$$

was nach Auflösen nach $h'(t_0)$ (und unter Beachtung des richtigen Vorzeichens für den Geschwindigkeitsvektor) das gleiche Ergebnis liefert.

(c) Untersuche das Grenzwertverhalten von $h'(t_0)$ für $h_0 \to \infty$! (1)

Lösung: Es gilt $h'(t_0) \to -\infty$ mit $h_0 \to \infty$. Der Aufprall wird also "beliebig hart".

18. *Gebremster Fall:* Ein punktförmiger Körper mit Masse $m > 0$ werde in einer Höhe $h_0 > 0$ aus der Ruhe heraus fallengelassen. Die Erdbeschleunigung sei $g > 0$, der Luftwiderstand $\varrho > 0$, sodass die Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bis zum Aufschlagszeitpunkt t_0 (also $h(t_0) = 0$) die Differentialgleichung $mh''(t) = -mg - \varrho h'(t)$ erfüllt.

(a) Zeige, dass die Gesamtenergie des Systems abnimmt, also dass $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$ eine bezüglich t streng monoton fallende Funktion ist! (2)

Lösung: Wir berechnen wieder

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)) &= mh'(t)h''(t) + mgh'(t)\\ &= (-mg - \varrho h'(t))h'(t) + mgh'(t) = -\varrho h'(t)^2.\end{aligned}$$

Also ist die Gesamtenergie monoton fallend. Weil eine konstante Funktion die Gleichung nicht lösen kann, gilt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz $h'(t) \neq 0$ bis auf isolierte Punkte, was zeigt, dass die Gesamtenergie sogar streng monoton fällt.

(b) Berechne $h(t)$ für $0 \leq t \leq t_0$! (2)

Lösung: Zur Lösung der Gleichung bezeichne $v := h'$ die Geschwindigkeit. Die Lösung von $v'(t) = -g - \frac{\varrho}{m}v(t)$ mit Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ist nach Lösungformel

$$h'(t) = v(t) = \mathrm{e}^{\frac{\varrho}{m}t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\varrho}{m}s} g \,\mathrm{d}s = -\frac{mg}{\varrho}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\varrho t}{m}}).$$

Hieraus folgt

$$h(t) = -\frac{mg}{\varrho}\Big(t + \frac{m}{\varrho}\mathrm{e}^{-\frac{\varrho t}{m}}\Big) + h_0 + \frac{m^2 g}{\varrho^2}.$$

(c) Untersuche das Grenzwertverhalten von $h'(t_0)$ für $h_0 \to \infty$. (+3)

Lösung: Der Zeitpunkt t_0 ist dadurch bestimmt, dass

$$t_0 + \frac{m}{\varrho}\mathrm{e}^{-\frac{\varrho t_0}{m}} = \frac{\varrho h_0}{mg} + \frac{m}{\varrho}$$

gilt. Dann gilt wegen $\varrho > 0$, $m > 0$ und $t_0 > 0$ auch

$$t_0 + \frac{m}{\varrho} \geq t_0 + \frac{m}{\varrho}\mathrm{e}^{-\frac{\varrho t_0}{m}} = \frac{\varrho h_0}{mg} + \frac{m}{\varrho},$$

also

$$t_0 \geq \frac{\varrho h_0}{mg},$$

was $t_0 \to \infty$ für $h_0 \to \infty$ zeigt; dies war aufgrund des Modells auch zu erwarten. Wir haben im vorigen Aufgabenteil schon eine Formel für $h'(t) = v(t)$ bestimmt. Lässt man in dieser t_0 gegen unendlich gehen, erhält man als Lösung der Aufgabe

$$\lim_{h_0 \to \infty} h'(t_0) = \lim_{t \to \infty} v(t) = -\frac{mg}{\varrho}.$$

Im Gegensatz zum freien Fall nähert sich die Geschwindigkeit beim gebremsten Fall also einem Gleichgewicht an.