Universität Ulm

Mittwoch, 02.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: +20

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 6

Die Aufgaben auf diesem Blatt geben ausschließlich Bonuspunkte, sind aber dennoch klausurrelevant. Beachte hierzu bitte auch die Hinweise auf der Homepage der Vorlesung, insbesondere bezüglich der Abgabe dieses Blattes.

19. Bestimme alle Lösungen folgender Differentialgleichungssysteme:

(a) $y'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} y(t);$ (+7)

(b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(t).$ (+2)

20. Sei $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig. Für stetig differenzierbare Funktionen $y_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $i = 1,\dots,d$, definieren wir $Y\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ durch

$$Y(t) \coloneqq (y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)),$$

d.h. der Vektor $y_i(t)$ ist die i.te Spalte der Matrix $Y(t)$, und schreiben $w(t) \coloneqq \det Y(t)$. Zeige:

(a) Genau dann gilt $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in (a,b)$, wenn $y_i'(t) = A(t)y_i(t)$ für alle $t \in (a,b)$ und $i = 1,\dots,d$ gilt. (+1)

In den restlichen Aufgabenteilen gelte $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in (a,b)$.

(b) Sei $t_0 \in (a,b)$. Es gibt genau eine stetig differenzierbare Funktion $X\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $X(t_0) = I$ und

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

für alle $t \in (a,b)$. Für diese Funktion gilt $Y(t) = X(t)Y(t_0)$ für alle $t \in (a,b)$. (+2)

(c) Sei $t_0 \in (a,b)$ und X wie im vorigen Aufgabenteil. Dann gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det X(t)\right)_{t=t_0} = \operatorname{Tr} A(t_0),$$

wobei

$$\operatorname{Tr} A(t) \coloneqq \sum_{i=1}^{d} A_{ii}(t)$$

die *Spur* der Matrix $A(t)$ bezeichnet. (+3)

Tipp: Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Determinante eine multilineare Funktion bezüglich der Spalten der Matrix ist.

(d) Es gilt $w'(t) = (\operatorname{Tr} A(t))w(t)$ für alle $t \in (a,b)$. (+2)

(e) Gibt es ein $t_0 \in (a,b)$ mit $w(t_0) = 0$, so gilt $w(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$. (+1)

Hinweis: Der (unbewiesene) Satz (8.4) soll hierfür nicht verwendet werden.

21. Seien die Funktionen $y_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, stetig differenzierbar. Es gelte

$$y_i'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\sin(t)} & \cos(t) \\ \sinh(t) & \cos(t) & \frac{1}{1+t^2} \\ 15 & \mathrm{e}^{\cosh(t)} & t \end{pmatrix} y_i(t)$$

für $i = 1, 2, 3$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Zudem sei

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_3(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $\det(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$! (+2)