Universität Ulm

Mittwoch, 02.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: +20

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Blatt 6

Die Aufgaben auf diesem Blatt geben ausschließlich Bonuspunkte, sind aber dennoch klausurrelevant. Beachte hierzu bitte auch die Hinweise auf der Homepage der Vorlesung, insbesondere bezüglich der Abgabe dieses Blattes.

19. Bestimme alle Lösungen folgender Differentialgleichungssysteme:

(a) $y'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} y(t);$ (+7)

Lösung: Setze

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 7 \\ 8 & 1-\lambda & -4 \\ 1 & 8 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= 729 - 81\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 9^3 - 9^2\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Man rät die Nullstelle $\lambda = 9$ und bestimmt mit Polynomdivision die Darstellung

$$p_A(\lambda) = (9-\lambda)(\lambda^2 + 81) = (9-\lambda)(\lambda - 9i)(\lambda + 9i).$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9i$ und $\lambda_3 = -9i$. Insbesondere sind alle Eigenwerte einfach, was zeigt, dass A diagonalisierbar ist. Mittels Gauss-Elimination kann man die zugehörigen Eigenvektoren

$$z_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } z_2 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 2-6i \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } z_3 = \begin{pmatrix} 4-3i \\ 2+6i \\ -5 \end{pmatrix}$$

bestimmen, wobei man z_3 im Grunde nicht benötigt und $z_3 = \overline{z}_2$ bereits klar war. Laut Vorlesung bilden also die Funktionen

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{9t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$y_2(t) = \cos(9t) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \sin(9t) \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$y_3(t) = \sin(9t) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \cos(9t) \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung. Anders gedrückt ist jede Lösung y von der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y(t)$$

mit gewissen reellen Koeffizienten c_1, c_2 und c_3, und alle solche Funktionen sind auch tatsächlich Lösungen. Das maximale Lösungsintervall ist nebenbei bemerkt natürlich $I = \mathbb{R}$.

(b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(t)$. (+2)

Lösung: Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert 1; bei oberen Dreiecksmatrizen stehen die Eigenwerte ja auf der Diagonalen. Allerdings hat die Matrix

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nur eindimensionalen Kern, was bedeutet, dass die Matrix nicht diagonalisierbar ist; die geometrische und die algebraische Vielfachheit stimmen nicht überein. Wir müssen also einen Hauptvektor höherer Ordnung bestimmen.

Sei dazu der Eigenvektor

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fixiert. Wir suchen also einen Vektor b_2 mit $(A - I)b_2 = b_1$, also $Ab_2 = b_1 + b_2$. Man rät leicht

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei b_2 aber nur bis auf einen Vektor im Kern von $A - I$ eindeutig bestimmt ist. Wie in der Vorlesung ergeben sich nun

$$y_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$y_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Fundamentalsystem. Genauer gesagt ist

$$y_1'(t) = \mathrm{e}^t b_1 = \mathrm{e}^t A b_1 = A y_1(t)$$

offensichtlich, und zudem ist

$$y_2'(t) = \mathrm{e}^t b_2 + \mathrm{e}^t b_1 + t\mathrm{e}^t b_1$$

und

$$A y_2(t) = \mathrm{e}^t A b_2 + t\mathrm{e}^t A b_1 = \mathrm{e}^t b_1 + \mathrm{e}^t b_2 + t\mathrm{e}^t b_1,$$

also $y_2'(t) = Ay(t)$. Dass die beiden Funktionen tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden, sieht man beispielsweise aus der Tatsache, dass $\det(y_1(0), y_2(0)) = \det I = 1$ ist. Die Lösungsgesamtheit ist somit durch alle Funktionen y der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

mit c_1 und c_2 in $\mathbb{R}$ gegeben. Nebenbei bemerkt ist offenbar $I = \mathbb{R}$ das maximale Lösungsintervall.

Bemerkung: Mit der inzwischen in der Vorlesung behandelten Theorie ließe sich der Aufwand hier deutlich vereinfachen. Man sieht nämlich recht einfach, dass

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

gilt, was unmittelbar auf ein Fundamentalsystem führt, nämlich die Spalten dieser Matrix.

20. Sei $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig. Für stetig differenzierbare Funktionen $y_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $i = 1,\dots,d$, definieren wir $Y\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ durch

$$Y(t) := (y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)),$$

d.h. der Vektor $y_i(t)$ ist die i.te Spalte der Matrix $Y(t)$, und schreiben $w(t) := \det Y(t)$. Zeige:

(a) Genau dann gilt $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in (a,b)$, wenn $y_i'(t) = A(t)y_i(t)$ für alle $t \in (a,b)$ und $i = 1,\dots,d$ gilt. (+1)

Lösung: Nach Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$A(t)Y(t) = A(t)(y_1(t),\dots,y_d(t)) = (A(t)y_1(t),\dots,A(t)y_d(t))$$

und offenbar ist

$$Y'(t) = (y_1'(t),\dots,y_d'(t)).$$

Dies zeigt sofort, dass die beiden Aussagen äquivalent sind.

In den restlichen Aufgabenteilen gelte $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in (a,b)$.

(b) Sei $t_0 \in (a,b)$. Es gibt genau eine stetig differenzierbare Funktion $X\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $X(t_0) = I$ und

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

für alle $t \in (a,b)$. Für diese Funktion gilt $Y(t) = X(t)Y(t_0)$ für alle $t \in (a,b)$. (+2)

Lösung: Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz garantiert die Existenz von Lösungen $x_i\colon (a,b) \to \mathbb{R}^d$ des Anfangswertproblems $x_i'(t) = A(t)x_i(t)$, $x_i(t_0) = e_i$ für $i = 1,\dots,d$. Nach dem vorigen Aufgabenteil hat dann $X(t) := (x_1(t),\dots,x_d(t))$ die gewünschten Eigenschaften.

Sei nun $X(t)$ eine solche Funktion und $Z(t) := X(t)Y(t_0)$. Aus der Definition der Matrixmultiplikation sieht man sofort, dass

$$Z'(t) = X'(t)Y(t_0) = A(t)X(t)Y(t_0) = A(t)Z(t)$$

gilt. Zudem ist offenbar $Z(t_0) = Y(t_0)$. Nach dem (Existenz- und) Eindeutigkeitssatz gilt also $Z(t) = Y(t)$ für alle $t \in (a,b)$. Dies ist die Zusatzbehauptung.

Sei $\widetilde{X}$ eine weitere Funktion mit diesen Eigenschaften. Wendet man die Zusatzbehauptung insbesondere für $Y = \widetilde{X}$ an, so ergibt sich

$$\widetilde{X}(t) = X(t)\widetilde{X}(t_0) = X(t)$$

für alle $t \in (a,b)$, also $\widetilde{X} = X$, was die Eindeutigkeit zeigt.

Bemerkung: Alternativ folgt die Eindeutigkeit von X aus dem vorigen Aufgabenteil und dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

(c) Sei $t_0 \in (a,b)$ und X wie im vorigen Aufgabenteil. Dann gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det X(t)\right)_{t=t_0} = \operatorname{Tr} A(t_0),$$

wobei

$$\operatorname{Tr} A(t) := \sum_{i=1}^{d} A_{ii}(t)$$

die *Spur* der Matrix $A(t)$ bezeichnet. (+3)

Tipp: Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Determinante eine multilineare Funktion bezüglich der Spalten der Matrix ist.

Lösung: Wir schreiben wieder $X(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$ in Spaltennotation. Dann gilt wegen Multilinearität und Stetigkeit der Determinante

$$\begin{aligned}
&\frac{\det X(t) - \det X(t_0)}{t - t_0} \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{d} \det\Big(x_1(t_0), \dots, x_{i-1}(t_0), \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0}, x_{i+1}(t), \dots, x_d(t)\Big) \\
&\qquad \to \sum_{i=1}^{d} \det\big(x_1(t_0), \dots, x_{i-1}(t_0), x_i'(t_0), x_{i+1}(t_0), \dots, x_d(t_0)\big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{d} \det\big(x_1(t_0), \dots, x_{i-1}(t_0), A(t_0)x_i(t_0), x_{i+1}(t_0), \dots, x_d(t_0)\big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{d} \det\big(e_1, \dots, e_{i-1}, A(t_0)e_i, e_{i+1}, \dots, e_d\big) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{d} A_{ii}(t_0) = \operatorname{Tr} A(t_0)
\end{aligned}$$

für $t \to t_0$. Um sich den ersten Schritt klarzumachen, kann es helfen, die Summe Formel für beispielsweise $d = 3$ auszuschreiben und das Teleskopsummenprinzip zu erkennen, vergleiche hierzu auch die Produktregel für mehr als zwei Faktoren. Der vorletzte Schritt folgt beispielsweise aus dem Entwicklungssatz für die Determinante; beachte hierbei, dass die hier auftretenden Matrizen beinahe diagonal sind.

(d) Es gilt $w'(t) = (\operatorname{Tr} A(t))w(t)$ für alle $t \in (a, b)$. (+2)

Lösung: Sei $t_0 \in (a, b)$ und X die zugehörige Matrix wie in den vorigen Aufgabenteilen. Dann ist nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$w'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det Y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det X(t) \cdot \det Y(t_0)$$

für alle $t \in (a, b)$. Setzt man nun speziell $t = t_0$ ein, ergibt sich aus dem vorigen Aufgabenteil

$$w'(t_0) = (\operatorname{Tr} A(t_0))w(t_0).$$

Da $t_0 \in (a, b)$ beliebig war, zeigt dies die Behauptung.

(e) Gibt es ein $t_0 \in (a, b)$ mit $w(t_0) = 0$, so gilt $w(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$. (+1)

Hinweis: Der (unbewiesene) Satz (8.4) soll hierfür nicht verwendet werden.

Lösung: Sei $w(t_0) = 0$. Dann lösen sowohl die konstante Nullfunktion als auch die Funktion w das Anfangswertproblem $z'(t) = (\operatorname{Tr} A(t))z(t)$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz stimmen die Funktionen dann auf ganz (a, b) überein, es gilt also $w(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$.

21. Seien die Funktionen $y_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, stetig differenzierbar. Es gelte

$$y_i'(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\sin(t)} & \cos(t) \\ \sinh(t) & \cos(t) & \frac{1}{1+t^2} \\ 15 & e^{\cosh(t)} & t \end{pmatrix} y_i(t)$$

für $i = 1, 2, 3$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Zudem sei

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_3(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $\det(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$! (+2)

Lösung: Es ist wohl nicht möglich, zumindest aber sehr schwierig, die Funktionen y_i explizit zu bestimmen. Allerdings ist aus Aufgabe 20 bekannt, dass die Wronski-Determinante

$$w(t) := \det(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$$

die Differentialgleichung

$$w'(t) = (0 + \cos(t) + t)w(t)$$

erfüllt, also von der Form

$$w(t) = ce^{\sin(t) + \frac{1}{2}t^2}$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$ ist, und genauer ist

$$c = w(0) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

aufgrund der Anfangsbedingung.