Universität Ulm

Samstag, 05.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 101

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur 1

1. Bestimmen Sie die Lösung (in möglichst einfacher Darstellung) folgender Anfangswertprobleme und geben Sie das maximale Lösungsintervall an:
Hinweis: Es ist nicht nötig, für die Eindeutigkeit der Lösung und die Maximalität des Lösungsintervalls Argumente zu geben.

(a) $y'(t) = \frac{1}{t\cos(y(t))}$, $y(1) = 0$. (10)

(b) $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^5 + t^2$, $y(1) = -1$. (10)

2. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y''(t) = \frac{(t-2)y(t)}{t^2} + \frac{(2-t)y'(t)}{t}$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$. (10)
Tipp: Die Funktion $y_1(t) = t$ löst die Gleichung.

(b) $y''(t) = \frac{(t-2)y(t)}{t^2} + \frac{(2-t)y'(t)}{t} + t$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$. (10)

3. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} y(t)$, $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (10)

(b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (10)

(c) $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (10)

4. Wir betrachten einen Tank, in dem 200 Liter reines (d.h. salzfreies) Wasser enthalten sind. Ab dem Startzeitpunkt $t = 0$ werden pro Minute 20 Liter Salzlösung der Konzentration 10 Gramm pro Liter eingepumpt. Zudem fließen pro Minute 20 Liter aus dem Tank ab. Wie üblich möge der Tankinhalt zu jedem Zeitpunkt ideal durchmischt sein. Bestimmen Sie die Salzmenge $S(t)$ in Gramm, die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ (in Minuten) im Tanks vorliegt, und entscheiden Sie, ob die Salzmenge für $t \to \infty$ gegen ein Gleichgewicht konvergiert!
Tipp: Stellen Sie eine inhomogene, lineare Differentialgleichung auf, die von S erfüllt wird, und lösen Sie diese. (10)

5. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen (immer) richtig oder (im Allgemeinen) falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechende Antwort auf der dafür vorgesehenen Seite des Prüfungsbogen an! (21)

(1) Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Funktion $z(t) := \mathrm{e}^t$ erfülle $z'(t) = f(t, z(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zudem sei $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 2$. Dann gilt $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

(2) Sei y eine globale Lösung des Anfangswertproblem $y''(t) = -y(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Dann ist $y(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(3) Sei $y(t) := \sin \frac{1}{t}$. Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t > 0$ erfüllt ist.

(4) Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$, so hat jede globale Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'(t) = g(y(t))$ das Grenzwertverhalten $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

(5) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die komplexe Einheit i ein Eigenwert von A. Dann ist jede Lösung y von $y'(t) = Ay(t)$ beschränkt.

(6) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ und $Ay_0 = -y_0$. Sei y die globale Lösung von $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$. Dann gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

(7) Es gibt stetige Funktionen p und q von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, mit denen jede der Funktionen $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = \sin(t)$ und $y_3(t) = \cos(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ ist.