Universität Ulm

Samstag, 05.06.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Sommersemester 2010
Punktzahl: 101

Lösungen Gewöhnliche Differentialgleichungen: Klausur 1

1. Bestimmen Sie die Lösung (in möglichst einfacher Darstellung) folgender Anfangswertprobleme und geben Sie das maximale Lösungsintervall an:
Hinweis: Es ist nicht nötig, für die Eindeutigkeit der Lösung und die Maximalität des Lösungsintervalls Argumente zu geben.

(a) $y'(t) = \frac{1}{t\cos(y(t))}$, $y(1) = 0$. (10)

Lösung: Für die Lösungsformel ist

$$G(z) = \int_0^z \cos(r)\,\mathrm{d}r = \sin(z)$$

und

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \log(t).$$

Also ist die Lösung

$$y(t) = \arcsin(\log(t))$$

auf dem größten Intervall $I \subset (0, \infty)$ mit $1 \in I$ und $-1 < \log(t) < 1$. Beachte, dass genau in diesem Bereich der Ausdruck auf der rechten Seite der Differentialgleichung definiert ist, man für $\log(t) = \pm 1$ hingegen eine Nullstelle des Cosinus erreicht. Das maximale Lösungsintervall ist also $I = (\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$.

(b) $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^5 + t^2$, $y(1) = -1$. (10)

Lösung: In der Lösungsformel ist $A(t) = \int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s} = \log(t)$, also

$$y(t) = t\Big(-1 + \int_1^t \frac{s^5 + s^2}{s}\,\mathrm{d}s\Big) = t\Big(-1 + \frac{t^5 - 1}{5} + \frac{t^2 - 1}{2}\Big) = \frac{1}{5}t^6 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{17}{10}t$$

auf dem maximalen Lösungsintervall $I = (0, \infty)$; beachte nämlich, dass die rechte Seite in $t = 0$ nicht definiert ist!

2. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y''(t) = \frac{(t-2)y(t)}{t^2} + \frac{(2-t)y'(t)}{t}$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$. (10)
Tipp: Die Funktion $y_1(t) = t$ löst die Gleichung.

Lösung: Wie im Skript (Reduktion der Ordnung) suchen wir u mit

$$0 = u'(t) + \Big(\frac{2}{t} - \frac{2-t}{t}\Big)u(t) = u'(t) + u(t),$$

beispielsweise also $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Eine Stammfunktion ist $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$, was nach Skript zur Lösung

$$y_2(t) = t\mathrm{e}^{-t}$$

führt. Die Funktionen y_1 und y_2 bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung. Man will nun a und b so wählen, dass für $y(t) := at + bt\mathrm{e}^{-t}$ die Anfangsbedingungen

$$1 = y(-1) = -a - b\mathrm{e}$$

und

$$0 = y'(-1) = a + b\mathrm{e} + b\mathrm{e}$$

erfüllt sind, also $0 = -1 + b\mathrm{e}$, was zu $b = \mathrm{e}^{-1}$ und $a = -2$, also

$$y(t) = -2t + t\mathrm{e}^{-t-1}.$$

Das maximale Lösungsintervall ist nebenbei bemerkt $I = (-\infty, 0)$, da die rechte Seite in $t = 0$ nicht definiert ist.

(b) $y''(t) = \frac{(t-2)y(t)}{t^2} + \frac{(2-t)y'(t)}{t} + t$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 0$. (10)

Lösung: Wir haben im vorigen Aufgabenteil das Fundamentalsystem $y_1(t) = t$ und $y_2(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmt. Die Wronski-Determinante ist also

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = -t^2\mathrm{e}^{-t}.$$

Laut Vorlesung ist die Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

mit

$$u_1'(t) = -\frac{g(t)y_2(t)}{w(t)} = 1$$

und

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t)}{w(t)} = -\mathrm{e}^t,$$

wobei $g(t) = t$ die Inhomogenität der Gleichung bezeichnet. Also ist

$$y(t) = t^2 - t + ay_1(t) + by_2(t)$$

für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$. Nach Anfangsbedingung muss dann

$$1 + 1 - a - b\mathrm{e} = 1$$

und

$$-2 - 1 + a + 2b\mathrm{e} = 0$$

gelten, also $b = 2\mathrm{e}^{-1}$ und $a = -1$, was zu

$$y(t) = t^2 - 2t + 2t\mathrm{e}^{-t-1}$$

führt. Das maximale Lösungsintervall ist nebenbei bemerkt $I = (-\infty, 0)$, da die rechte Seite für $t = 0$ nicht definiert ist.

3. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} y(t)$, $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (10)

Lösung: Da die Matrix in unterer Dreiecksform vorliegt, kann man die Eigenwerte als $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$ ablesen. Zugehörige Eigenvektoren berechnet man beispielsweise mittels Gauß-Elimination zu

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist dann die allgemeine Lösung der Gleichung durch

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{5(t-1)} b_1 + c_2 \mathrm{e}^{-(t-1)} b_2$$

gegeben; man beachte, dass die Verschiebung der Zeitvariablen nur die multiplikative Konstante ändert. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, wählt man $c_1 = -1$ und $c_2 = 1$, erhält also die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{5(t-1)} \\ -\mathrm{e}^{5(t-1)} + \mathrm{e}^{-(t-1)} \end{pmatrix}$$

auf dem maximalen Lösungsintervall $I = \mathbb{R}$.

(b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (10)

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$p_A(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

und hat somit die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i.$$

Die Matrix ist also komplex diagonalisierbar. Einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2 + i$ kann man nun direkt ablesen (man bestimme eine beliebigen Vektor b_1, für den $(A - \lambda_1 I)b_1$ in der ersten Komponente verschwindet). Es ergibt sich beispielsweise

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Dann muss $b_2 := \overline{b}_1$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ sein. Die allgemeine reelle Lösung lautet nun

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + c_2 \mathrm{e}^{2t}\left(\sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

mit reellen Konstanten c_1 und c_2. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, muss

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten, also $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$. Dies ergibt die Lösung

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$$

mit maximalem Lösungsintervall $I = \mathbb{R}$.

(c) $y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y(t)$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (10)

Lösung: Die Matrix liegt bereits in Jordannormalform vor. Laut Vorlesung ist dann

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} & t\mathrm{e}^{5t} \\ 0 & \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix},$$

und die Spalten dieser Matrix bilden ein Fundamentalsystem der Gleichung. Als passende Linearkombination für den Anfangswert ergibt sich dann offenbar

$$y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{5t} \\ \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}.$$

Das maximale Lösungsintervall ist $I = \mathbb{R}$.

4. Wir betrachten einen Tank, in dem 200 Liter reines (d.h. salzfreies) Wasser enthalten sind. Ab dem Startzeitpunkt $t = 0$ werden pro Minute 20 Liter Salzlösung der Konzentration 10 Gramm pro Liter eingepumpt. Zudem fließen pro Minute 20 Liter aus dem Tank ab. Wie üblich möge der Tankinhalt zu jedem Zeitpunkt ideal durchmischt sein. Bestimmen Sie die Salzmenge $S(t)$ in Gramm, die zum Zeitpunkt $t \geq 0$ (in Minuten) im Tanks vorliegt, und entscheiden Sie, ob die Salzmenge für $t \to \infty$ gegen ein Gleichgewicht konvergiert!
Tipp: Stellen Sie eine inhomogene, lineare Differentialgleichung auf, die von S erfüllt wird, und lösen Sie diese. (10)

Lösung: Die Änderung der Salzmenge im Tank wird durch

$$S'(t) = 20 \cdot 10 - \tfrac{20}{200} S(t)$$

beschrieben, und zudem ist $S(0) = 0$. Nach Lösungsformal ist also

$$S(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \int_0^t 200\mathrm{e}^{\frac{1}{10}s}\,\mathrm{d}s = 2000\Big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}\Big).$$

Offenbar konvergiert $S(t)$ für $t \to \infty$ gegen 2000. Es sind also auf lange Sicht annähernd 2 Kilogramm Salz im Tank. Dies war natürlich zu erwarten, da die Konzentration sich der Konzentration der zugepumpten Flüssigkeit annähern sollte.

5. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen (immer) richtig oder (im Allgemeinen) falsch sind. Kreuzen Sie die entsprechende Antwort auf der dafür vorgesehenen Seite des Prüfungsbogen an! (21)

(1) Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Funktion $z(t) := \mathrm{e}^t$ erfülle $z'(t) = f(t, z(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zudem sei $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine globale Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = 2$. Dann gilt $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

Lösung: Richtig: Nach dem Eindeutigkeitssatz kann es kein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = z(t_0)$ geben, da dann ja $y = z$ wäre, was $y(0) \neq z(0)$ widerspricht. Unter Verwendung des Zwischenwertsatzes folgt dann, dass $y - z$ keinen Vorzeichenwechsel haben kann, was $y(t) \geq z(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigt. Insbesondere gilt somit die Behauptung.

(2) Sei y eine globale Lösung des Anfangswertproblem $y''(t) = -y(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Dann ist $y(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: Falsch: Aus der Vorlesung ist als Fundamentalsystem $y_1(t) = \sin(t)$ und $y_2(t) = -\cos(t)$ bekannt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$. Diese Funktion hat beispielsweise bei $t = \pi$ negativ.

(3) Sei $y(t) := \sin\frac{1}{t}$. Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t > 0$ erfüllt ist.

Lösung: Falsch: Nehmen wir an, es gäbe so ein f. Das Lösungsintervall $I = (0, \infty)$ wäre maximal, da die Funktion y keine stetige Fortsetzung nach $t = 0$ besitzt. Laut Vorlesung müsste die maximale Lösung der Differentialgleichung die kompakte Menge $[0, 1] \times [-1, 1]$ verlassen, was hier aber nicht der Fall ist.

(4) Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$, so hat jede globale Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'(t) = g(y(t))$ das Grenzwertverhalten $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.

Lösung: Richtig: Offenbar ist $y'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also y streng monoton wachsend. Daher konvergiert $y(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wäre $a \neq \infty$, so müsste nach Aufgabe 10 sogar $g(a) = 0$ gelten, was $g(a) > 0$ widerspräche.

(5) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die komplexe Einheit i ein Eigenwert von A. Dann ist jede Lösung y von $y'(t) = Ay(t)$ beschränkt.

Lösung: Richtig: Ist i ein Eigenwert einer reellen Matrix, so auch $-i$, und damit haben wir also alle Eigenwerte von A bestimmt. Folglich ist A komplex diagonalisierbar mit rein imaginären Eigenwerten, und die Lösungsformel für diesen Fall zeigt, dass alle Lösungen beschränkt sind.

(6) Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ und $Ay_0 = -y_0$. Sei y die globale Lösung von $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$. Dann gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Lösung: Richtig: Nach Voraussetzung ist y_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Nach einem Lemma der Vorlesung gilt dann $y(t) = \mathrm{e}^{-t}y_0$. Dies zeigt die Behauptung.

(7) Es gibt stetige Funktionen p und q von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, mit denen jede der Funktionen $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = \sin(t)$ und $y_3(t) = \cos(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$ ist.

Lösung: Falsch: Die Funktionen y_1, y_2 und y_3 sind linear unabhängig. Sei nämlich

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit reellen Zahlen c_1, c_2, c_3. Wertet man an $t = 0$ aus, ergibt sich

$$c_1 + c_3 = 0.$$

Leitet man zweimal ab und wertet dann an $t = 0$ aus, erhält man zudem

$$c_1 - c_3 = 0.$$

Dies ist nur für $c_1 = 0$ und $c_3 = 0$ möglich. Dann ist aber $c_2 \sin(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, was $c_2 = 0$ zeigt. Wir haben nach Definition die lineare Unabhängigkeit der Funktionen gezeigt.

Laut Vorlesung ist der Lösungsraum der Gleichung für festes p und q allerdings zweidimensional. Es kann somit keine drei linear unabhängigen Lösungen geben.