



---

## Elemente der Topologie: Blatt 1

---

1. Sei  $\Omega$  eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Entscheide, welche der folgenden Mengensysteme Topologien auf  $\Omega$  sind:
  - (a)  $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ . (3)
  - (b)  $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O^c \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ . (3)
  - (c)  $\mathcal{T} = \{O \subset \Omega : O \text{ unendlich}\} \cup \{\emptyset\}$ . (3)
  
2. Zeige, dass folgende Mengensysteme topologische Basen auf  $\mathbb{R}$  sind und vergleiche die erzeugten Topologien bezüglich ihrer Feinheit: (11)
  - (a)  $\mathcal{B}_1 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  (*euklidische Topologie*)
  - (b)  $\mathcal{B}_2 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  (*Sorgenfrey-Topologie* oder *lower limit topology*)
  - (c)  $\mathcal{B}_3 := \{(a, b) \setminus A : a, b \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R} \text{ höchstens abzählbar}\}$
  - (d)  $\mathcal{B}_4 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$
  - (e)  $\mathcal{B}_5 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$
  - (f)  $\mathcal{B}_6 := \{E^c : E \subset \mathbb{R} \text{ endliche Menge}\}$
  
3. Bestimme alle Topologien auf  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ! (+5)  
**Tipp:** Es gibt genau 29 Topologien auf  $\Omega$ . Es ist also hilfreich, bei der Aufzählung systematisch vorzugehen.