Universität Ulm
Abgabe: Dienstag, 03.05.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+4

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 2

4. Sei Ω ein topologischer Raum und M, N und M_α Teilmengen von Ω. Zeige:

(a) Aus $M \subset N$ folgt $M^\circ \subset N^\circ$ und $\overline{M} \subset \overline{N}$. (2)

Lösung: Die Menge M° ist eine offene Teilmenge von M, also auch eine offene Teilmenge von N. Da N° nach Definition die größte offene Teilmenge von N ist, muss also $M^\circ \subset N^\circ$ sein. Analog dazu ist $\overline{N}$ eine abgeschlossene Obermenge von N und somit auch von M, woraus nach Definition $\overline{M} \subset \overline{N}$ folgt.

(b) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$. (2)

Lösung: Wegen $M \subset M \cup N$ ist $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ nach dem vorigen Aufgabenteil. Ebenso folgt $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$, was insgesamt $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ zeigt.
Zudem ist $\overline{M} \cup \overline{N}$ eine abgeschlossene Menge, die $M \cup N$ enthält, was $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$ zeigt.

(c) $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$; im Allgemeinen gilt keine Gleichheit. (2)

Lösung: Wegen $M \cap N \subset M$ folgt $\overline{M \cap N} \subset \overline{M}$, und ebenso sieht man $\overline{M \cap N} \subset \overline{N}$. Insgesamt folgt $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$.
Setzt man speziell $M = (-1, 0)$ und $N = (0, 1)$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie, so ist $\overline{M \cap N} = \emptyset \neq \{0\} = \overline{M} \cap \overline{N}$.

(d) $\bigcup_\alpha \overline{M}_\alpha \subset \overline{\bigcup_\alpha M_\alpha}$; im Allgemeinen gilt keine Gleichheit. (2)

Lösung: Für jedes α_0 folgt aus $M_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha M_\alpha$ die Inklusion $\overline{M}_{\alpha_0} \subset \overline{\bigcup_\alpha M_\alpha}$, was den ersten Teil der Behauptung zeigt.
Setzt man $M_n := \{\frac{1}{n}\}$ in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie, so ist $\overline{M}_n = M_n$ und somit

$$\bigcup_n \overline{M}_n = \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \neq \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \overline{\bigcup_n M_n}.$$

5. Bestimme M°, $\overline{M}$, ∂M und M' in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:
Hinweis: Wie immer sind die Behauptungen zu begründen.

(a) $M = (0, 1)$, $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{B}_4$ aus Aufgabe 2 erzeugten Topologie. (4)
Tipp: Bestimme die Topologie explizit.

Lösung: Man sieht schnell, dass $\mathcal{B}_4 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$ die Topologie

$$\mathcal{T} := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

erzeugt; dazu muss man nur beobachten, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, die $\mathcal{B}_4$ enthält (was $\mathcal{T}(\mathcal{B}_4) \subset \mathcal{T}$ zeigt) und jedes Element von $\mathcal{T}$ eine Darstellung als Vereinigung von Basismengen besitzt (was $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B}_4)$ zeigt).
Also gibt es keine offene Teilmenge von M außer der leeren Menge, was $M^\circ = \emptyset$ zeigt. Die die abgeschlossenen Mengen gerade die Mengen der Form $[a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind, ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von M die Menge $\overline{M} = [0, \infty)$. Nach Definition folgt $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = [0, \infty)$.
Wir zeigen zuletzt noch $M' = [0, \infty)$. Laut Vorlesung gilt $M' \subset \overline{M} = [0, \infty)$. Ist nun $x \in [0, \infty)$ und U eine Umgebung von x, also $U = (-\infty, b)$ mit $b > x$, so ist $\frac{x+b}{2} \in (U \cap M) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, also nach Definition $x \in M'$.

(b) $M = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{B}_6$ aus Aufgabe 2 erzeugten Topologie. (4)
Tipp: Bestimme die Topologie explizit.

Lösung: Ähnlich wie im vorigen Aufgabenteil sieht man schnell, dass

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}_6) = \mathcal{B}_6 \cup \{\emptyset\} = \{E^c : E \text{ endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\}$$

gilt. Weil $\mathbb{Z}$ keine nicht-leere offene Menge enthält, ist $M^\circ = \emptyset$. Weil die einzigen abgeschlossenen Mengen außer $\mathbb{R}$ die endlichen Mengen sind, ist zudem $\overline{M} = \mathbb{R}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von M. Nach Definition folgt $\partial M = \mathbb{R}$.

Wir zeigen nun noch $M' = \mathbb{R}$. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $M \setminus \{x\}$ eine unendliche Menge und daher wiederum $\overline{M \setminus \{x\}} = \mathbb{R} \ni x$. Laut Vorlesung folgt daraus $x \in M'$.

(c) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{T}$ die von $\mathcal{B}_3$ aus Aufgabe 2 erzeugten Topologie. (4)

Lösung: Jede Basismenge in $\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \setminus A : a, b \in \mathbb{R},\ A \text{ abzählbar}\}$ ist leer oder überabzählbar. Da M abzählbar ist, kann M keine nicht-leere Basismenge enthalten. Nach Satz 3.5 ist also $M^\circ = \emptyset$. Die Menge $\mathbb{R} \setminus M$ ist in $\mathcal{B}_3$ und somit offen. Also ist M abgeschlossen, was $\overline{M} = M$ zeigt. Nach Definition folgt $\partial M = M$.

Wir zeigen nun noch $M' = \emptyset$. Sei dazu angenommen, dass es ein $x \in M'$ gäbe. Wegen $M' \subset \overline{M} = M$ ist dann $x = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt aber $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap M = \{x\}$, was wegen $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathcal{U}(x)$ zeigt, dass x nicht in M' liegt.

Bemerkung: Man kann die Bestimmung der Häufungspunkte in diesem Fall auch auf die Untersuchung der euklidischen Topologie zurückführen. Da wir schon wissen, dass $\mathcal{T}$ feiner als die euklidische Topologie ist, ist M' in der Menge der Häufungspunkte bezüglich der euklidischen Topologie enthalten. Wir wissen also $M' \subset \{0\}$, was wegen $M' \subset \overline{M} = M$ nur für $M' = \emptyset$ möglich ist.

(d) $M = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\mathcal{T}$ die Sorgenfrey-Topologie. (+4)

Lösung: Es gilt $M^\circ = \emptyset$, da die abzählbare Menge M keine nicht-leere Menge der Form $[a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ enthält. Wir zeigen nun, dass $\overline{M} = [0,1)$ gilt. Zum einen ist

$$[0,1)^c = (-\infty, 0) \cup [1, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, 0) \cup [1, n)$$

offen, also $[0,1)$ abgeschlossen, was $\overline{M} \subset [0,1)$ zeigt. Ist andererseits $x \in [0,1)$ und $x \in [a,b)$, so ist $[a,b) \cap M \supset (x,b) \cap M \neq \emptyset$, also $x \in \overline{M}$. Wir haben also auch $[0,1) \subset \overline{M}$ gezeigt. Nach Definition folgt nun $\partial M = [0,1)$.

Wir zeigen schließlich $M' = [0,1)$. Die Inklusion $M' \subset \overline{M} = [0,1)$ ist aus der Vorlesung klar. Ist andererseits $x \in [0,1)$ und $[a,b)$ eine Umgebung von x, so enthält (x,b) einen Punkt von M, was $([a,b) \cap M) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ zeigt, also $x \in M'$.