Universität Ulm
Abgabe: Dienstag, 10.05.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 3

6. Entscheide für jede Topologie aus Aufgabe 2, ob alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind und ob $\mathbb{R}$ mit dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist! (4)
Tipp: Es hilft, die Ergebnisse aus Aufgabe 2 über die Feinheit der Topologien zu benutzen.

Lösung: Die euklidische Topologie (und somit alle feineren Topologien) macht $\mathbb{R}$ zu einem Hausdorff-Raum, da die Topologie metrisch ist. Insbesondere sind dann auch alle endlichen Mengen abgeschlossen.

In $\mathcal{T}_6 := \mathcal{T}(\mathcal{B}_6)$ sind die endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach Definition abgeschlossen. Allerdings ist $\mathcal{T}_6$ keine Hausdorff-Topologie, da je zwei nicht-leere Basismengen E_1^c und E_2^c immer nicht-trivialen Durchschnitt $E_1^c \cap E_2^c = (E_1 \cup E_2)^c \neq \emptyset$ haben.

In der Topologie $\mathcal{T}_4 := \mathcal{T}(\mathcal{B}_4)$ ist sogar keine nicht-leere endliche Menge abgeschlossen. Ist nämlich $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge und $x > \max E$, so gibt es keine Basismenge $B \in \mathcal{B}_4$ mit $x \in B_4 \subset E^c$, was zeigt, dass E^c nicht offen ist, also E nicht abgeschlossen. Insbesondere kann dann $\mathcal{T}_4$ keine Hausdorff-Topologie sein.

7. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ mit der von $\mathcal{B}_6$ aus Aufgabe 2 erzeugten Topologie (der *kofinalen Topologie*) versehen. Für eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definieren wir $\operatorname{Lim} x_n := \{x \in \mathbb{R} : x_n \to x\}$. Zeige:

(a) Es gibt eine Folge (x_n) mit $\operatorname{Lim} x_n = \mathbb{R}$. (2)

Lösung: Beispielsweise definiert $x_n := n$ eine solche Folge. Ist nämlich $x \in \mathbb{R}$ und $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es eine endliche Menge $E \subset \mathbb{R}$ mit $x \in E^c \subset U$. Weil höchstens endlich viele Elemente von $\mathbb{N}$ in E liegen, ist $x_n \in E^c \subset U$ für alle $n \geq n_0 := \max(\mathbb{N} \cap E)$, was $x_n \to x$ zeigt.

(b) Es gibt eine Folge (x_n) mit $\operatorname{Lim} x_n = \emptyset$. (2)

Lösung: Beispielsweise definiert $x_n := (-1)^n$ eine solche Folge. Ist nämlich $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$, so ist $U := \{1\}^c$ eine offene Umgebung von x, für die es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \notin U$ gibt, was $x_n \not\to x$ zeigt. Für $x = 1$ argumentiert man entsprechend mit $U := \{-1\}^c$.

(c) Für alle Folgen (x_n) gilt entweder $\operatorname{Lim} x_n = \mathbb{R}$ oder $\operatorname{Lim} x_n = \emptyset$ oder $\operatorname{Lim} x_n = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}$. (4)

Lösung: Sei eine Folge (x_n) gegeben mit $\operatorname{Lim} x_n \neq \emptyset$ und $\operatorname{Lim} x_n \neq \{x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt also $y \in \operatorname{Lim} x_n$ und $z \in \operatorname{Lim} x_n$ mit $y \neq z$. Wir zeigen $\operatorname{Lim} x_n = \mathbb{R}$. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $B \in \mathcal{B}_6$ mit $x \in B$, also $B = E^c$ mit einer endlichen Menge E, die x nicht enthält. Dann ist $B \cup \{y\} = (E \setminus \{y\})^c \in \mathcal{B}_6$ eine offene Umgebung von y. Es gibt also $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B \cup \{y\}$ für $n \geq n_1$. Analog dazu gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B \cup \{z\}$ für $n \geq n_2$. Also ist $x_n \in (B \cup \{y\}) \cap (B \cup \{z\}) = B$ für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Wir haben $x_n \to x$ gezeigt.

8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f \colon \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Fassen wir $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung als eine gerichtete Menge auf, so ist f ein Netz in M. Zeige, dass für $x \in M$ folgende Aussagen äquivalent sind: (4)

(i) $\lim_{t\to\infty} f(t) = x$ im Sinne der Analysis, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $d(f(t), x) < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$.

(ii) f konvergiert gegen x im Sinne der Netzkonvergenz.

(iii) Für jede Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}$ mit $t_n \to \infty$ gilt $f(t_n) \to x$.

Lösung: „(i) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$. Sei t_0 wie in der Voraussetzung. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $t_n \geq t_0$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $d(f(t_n), x) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, was gerade $f(t_n) \in B(x, \varepsilon) \subset U$ heißt. Wir haben $f(t_n) \to x$ gezeigt.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Angenommen, f konvergiert nicht gegen x im Sinne von Netzen. Dann gibt es also $U \in \mathcal{U}(x)$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ ein $t \geq t_0$ mit $f(t) \notin U$ gibt. Wir finden also t_n mit $t_n \geq n$ und $f(t_n) \notin U$. Insbesondere gilt dann $t_n \to \infty$ und $f(t_n) \not\to x$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{U}(x)$ nach Definition der Netzkonvergenz ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(t) \in B(x, \varepsilon)$ für alle $t \geq t_0$.

Bemerkung: Um die Netzkonvergenz durch die Konvergenz entlang jeder Folge auszudrücken, war nur wesentlich, dass es eine Folge gibt, die in der gerichteten Menge $\mathbb{R}$ gegen unendlich konvergiert. Daher gibt es eine solche Umformulierung für jedes Netz, dessen zugehörige gerichtete Menge eine abzählbare Teilmenge ohne obere Schranke besitzt. Nach oben unbeschränkte Teilmengen einer gerichteten Menge nennt man *kofinal*.

9. Sei Ω ein topologischer Raum und $x \in \Omega$. Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x)$ heißt *Umgebungsbasis von* x, falls $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ gilt und es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $B \subset U$. Zeige:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von Ω, so ist $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von x. (2)

Lösung: Jede Menge in $\mathcal{B}(x)$ ist offen und enthält x, ist also eine (offene) Umgebung von x. Ist nun $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es nach Definition eine offene Menge O mit $x \in O \subset U$. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es also $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset O \subset U$.

(b) Kommt die Topologie auf Ω von einer Metrik d, so ist $\mathcal{B}(x) := \{B(x, r) : r \in \mathbb{Q}_+\}$ eine Umgebungsbasis von x, wobei wie üblich $B(x, r) := \{y \in \Omega : d(x, y) < r\}$ sei. (2)

Lösung: Mit der üblichen Basis $\mathcal{B}$ der metrischen Topologie ist $\mathcal{B}(x) \subset \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist also nur noch zu zeigen, dass es zu jeder Kugel $B(y, R) \in \mathcal{B}$ mit $x \in B(y, R)$ ein $r \in \mathbb{Q}_+$ gibt mit $B(x, r) \subset B(y, R)$. Wähle dazu $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < R - d(x, y)$. Dann gilt für alle $z \in B(x, r)$

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < r + d(x, y) < R,$$

was $B(x, r) \subset B(y, R)$ zeigt, also die Behauptung.