Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Elemente der Topologie: Blatt 4

10. Sei Ω ein topologischer Raum mit einer Basis $\mathcal{C}$. Zeige:

(a) Besitzt $x \in \Omega$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so gibt es eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{C}$, die eine Umgebungsbasis von x ist. (4)

(b) Erfüllt Ω das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so gibt es eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{C}$, die eine Basis der Topologie von Ω ist. (4)
Tipp: Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von Ω. Betrachte Mengen $C_{m,n}$ mit $B_m \subset C_{m,n} \subset B_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, für die eine solche Menge $C_{m,n}$ existiert. Verwende dann Satz 2.3.

11. Untersuche für jede Topologie aus Aufgabe 2, ob das erste und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist und ob der Raum separabel ist! (12)
Tipp: Aufgabe 10 kann hier helfen, insbesondere bei der Untersuchung von $\mathcal{T}(\mathcal{B}_3)$.

12. Sei Ω ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und sei $M \subset \Omega$. Zeige:

(a) M besitzt höchstens abzählbar viele isolierte Punkte. (+4)

(b) Ist M überabzählbar, so ist M' überabzählbar. (+1)