Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 24.05.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Elemente der Topologie: Blatt 5

13. Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Es sei X separabel und f surjektiv. Zeige, dass dann auch Y separabel ist! (2)

14. Seien X und Y topologische Räume, wobei Y die Hausdorff-Eigenschaft habe. Sei M eine dichte Teilmenge von X und $f\colon M \to Y$ eine Funktion. Zeige, dass es dann höchstens eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}\colon X \to Y$ von f gibt, also höchstens eine stetige Funktion $\tilde{f}\colon X \to Y$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in M$! (2)

15. Sei $\mathcal{T}_e$ die euklidische Topologie und $\mathcal{T}_\ell$ die Sorgenfrey-Topologie. Zeige, dass eine Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\ell) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ genau dann stetig ist, wenn sie im Sinne der Analysis rechtsseitig stetig ist! (4)
Hinweis: Wir nennen f *rechtsseitig stetig im Sinne der Analysis*, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jede monoton fallende Folge (t_n) mit $t_n \to t$ (im Sinne der euklidischen Topologie) $f(t_n) \to f(t)$ (im Sinne der euklidischen Topologie) gilt.

16. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subset X$. Die Topologie $\mathcal{T}_M \coloneqq \{O \cap M : O \in \mathcal{T}_X\}$ heißt *Spurtopologie* oder *Relativtopologie* von M bezüglich X. Zeige:

(a) Seien $(A_k)_{k=1}^n$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = X$ und sei Y ein topologischer Raum. Für jedes k sei $f_k\colon A_k \to Y$ eine bezüglich der Spurtopologie auf A_k stetige Funktion. Es gelte $f_k(x) = f_\ell(x)$ für $x \in A_k \cap A_\ell$. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $f\colon X \to Y$ mit $f(x) = f_k(x)$ für alle $x \in A_k$. (5)
Bemerkung: Dies ist eine abstrakte Version der Überlegungen, die man anstellt, wenn man nachprüft, dass eine stückweise definierte Funktion stetig ist.

(b) Die Aussage des vorigen Aufgabenteils wird falsch, wenn man abzählbar unendlich viele Mengen $(A_k)_{k=1}^\infty$ zulässt. (2)

(c) Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann ist die Funktion $f \wedge g$, die durch durch $(f \wedge g)(x) \coloneqq f(x) \wedge g(x) \coloneqq \min\{f(x), g(x)\}$ definiert ist, ebenfalls stetig. (5)
Tipp: Zeige, dass $\{x \in X : f(x) \le g(x)\}$ abgeschlossen ist!
Hinweis: Die Aussage, dass $f - g$ stetig ist, steht noch nicht zur Verfügung, wird aber zur Lösung der Aufgabe auch nicht zwingend benötigt.

17. Zeige, dass es eine folgenstetige Funktion gibt, die nicht stetig ist! (+5)