Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Elemente der Topologie: Blatt 6

18. Sei X eine nicht-leere Menge und $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge topologischer Räume, die jeweils das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_k \colon X \to Y_k$ gegeben. Wir versehen X mit der von $\mathcal{F} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ rückwärts induzierten Topologie. Zeige, dass X dann das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt! (5)

19. Sei Y eine nicht-leere Menge und $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Zu jedem $\alpha \in I$ sei eine Funktion $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y$ gegeben. Zeige:

(a) Es gibt eine eine feinste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ auf Y, bezüglich der jede der Funktionen f_α stetig ist. (5)
Tipp: Man zeige, dass $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{O \subset Y : f_\alpha^{-1}(O) \text{ offen für alle } \alpha \in I\}$ gilt.
Bezeichnung: Diese Topologie heißt *von $\mathcal{F} := \{f_\alpha : \alpha \in I\}$ vorwärts induzierte Topologie* oder *Finaltopologie bezüglich $\mathcal{F}$*.

(b) Eine Funktion $g \colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z ist genau dann stetig bezüglich $\mathcal{T}(\mathcal{F})$, wenn $g \circ f_\alpha \colon X_\alpha \to Z$ für jedes $\alpha \in I$ eine stetige Funktion ist. (5)

(c) Setze $R := \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(X_\alpha)$. Dann ist die Spurtopologie von $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ auf $Y \setminus R$ die diskrete Topologie. (5)
Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass der Fall $R \neq Y$ uninteressant ist. Viele Autoren fordern daher $R = Y$ in der Definition der Finaltopologie.

Zusatzinformation: Ist X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so heißt die von $x \mapsto [x]_\sim$ auf $X/\sim$ vorwärts induzierte Topologie die *Quotiententopologie*. Beispiel: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zur Einheitskreislinie versehen mit der Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}^2$.

20. (a) Zeige, dass auf $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, die Produkttopologie als Produkt $\mathbb{R}^N = \prod_{k=1}^N \mathbb{R}$ mit der euklidische Topologie zusammenfällt! (+2)

(b) Seien X ein topologischer Raum und f und g stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch die Funktionen $f + g$ und $f - g$ stetig sind! (+3)