Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 07.06.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+5

Elemente der Topologie: Blatt 7

21. Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir versehen den *Graphen* $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ von f mit der Spurtopologie des Produktraums $X \times Y$. Sei π die Einschränkung der Projektion in die erste Koordinate auf $G(f)$, also $\pi((x, f(x))) := x$. Zeige:

(a) π ist bijektiv und stetig. (3)

(b) π ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig ist. (3)

(c) Sei Y ein Hausdorff-Raum. Ist f stetig, so ist $G(f)$ abgeschlossen. (3)

(d) Es gibt Hausdorff-Räume X und Y und eine unstetige Funktion $f\colon X \to Y$, für die $G(f)$ abgeschlossen ist. (3)

22. Zeige, dass ein topologischer Raum X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ im Produktraum $X \times X$ abgeschlossen ist! (4)

23. Sei X ein topologischer Raum, in dem jedes Netz höchstens einen Grenzwert besitzt. Zeige, dass X ein Hausdorff-Raum ist! (4)
Bemerkung: Die Umkehrung dieser Aussage wurde bereits in der Vorlesung bewiesen.

24. Sei X ein kompakter topologischer Raum, I eine gerichtete Menge, und für jedes $i \in I$ sei $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes $x \in X$ konvergiere das Netz $(f_i(x))_{i\in I}$ monoton fallend gegen eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$, und die dadurch definierte Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeige, dass das Netz (f_i) dann gleichmäßig gegen f konvergiert, also dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ gibt mit $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$ und alle $x \in X$. Zeige zudem, dass die Aussage im Allgemeinen falsch ist, falls X nicht kompakt oder f nicht stetig ist. (+5)
Hinweis: Wir sagen, dass ein Netz $(y_i)_{i\in I}$ monoton fällt, falls $y_i \leq y_j$ für alle $i \geq j$ gilt.