Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 21.06.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+10

Elemente der Topologie: Blatt 8

Wegen Pfingstmontag findet wird die Übung am 14. Juni durch eine Vorlesungsstunde ersetzt. Für die Bearbeitung dieses Blattes stehen somit zwei Wochen zur Verfügung.

25. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Zeige:

(a) Ist Y ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein Homöomorphismus. (3)

(b) Es gibt keine Hausdorff-Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ auf X mit $\tilde{\mathcal{T}} \subsetneq \mathcal{T}$. (3)

26. Seien X und Y kompakte Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeige, dass der Graph $G(f)$ von f genau dann in $X \times Y$ abgeschlossen ist, wenn f stetig ist! (3)

27. Sei X ein topologischer Raum. Wir vergleichen einige Kompaktheitsbegriffe für X. Zeige:

(a) Ist X folgenkompakt, so ist X *abzählbar kompakt*, d.h. jede abzählbare offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. (3)
Bemerkung: Trivialerweise ist jeder kompakte Raum abzählbar kompakt.

(b) Ist X abzählbar kompakt, so ist X *häufungspunktkompakt*, d.h. jede unendliche Teilmenge von X besitzt einen Häufungspunkt. (3)

(c) Ist X abzählbar kompakt, so ist X *pseudokompakt*, d.h. jede stetige Funktion von f nach $\mathbb{R}$ ist beschränkt. (3)

Information: Es gibt noch weitere Kompaktheitsbegriffe, beispielsweise die *Parakompaktheit*, die *Metakompaktheit* und die *Orthokompaktheit*.

28. (a) Sei $X := \{f \in [0,1]^{[0,1]} : f(t) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } t \in [0,1]\}$ mit der Spurtopologie von $[0,1]^{[0,1]}$ versehen. Zeige, dass X folgenkompakt, aber nicht kompakt ist! (3)

(b) Sei $I := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Binärfolgen. Zeige, dass $\{0,1\}^I$ kompakt, aber nicht folgenkompakt ist! Hierbei ist wie üblich $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und $\{0,1\}^I$ mit der entsprechenden Produkttopologie versehen. (3)
Tipp: Betrachte die Folge $(x_n) \subset \{0,1\}^I$, die durch $x_n((b_i)_{i\in\mathbb{N}}) := b_n$ gegeben ist.

(c) Erfüllt ein kompakter topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er folgenkompakt. (3)

(d) Erfüllt ein folgenkompakter topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist er kompakt. (3)