Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 20+3

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 10

32. Sei X ein normaler Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeige:

(a) Es gibt eine abzählbare Familie $\mathcal{F}$ bestehend aus stetigen Funktionen von X nach $[0,1]$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \notin U$. (3)
Tipp: Gegeben Basismengen B_1 und B_2 mit $\overline{B}_1 \subset B_2$, wähle eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \overline{B}_1$ und $f(y) = 0$ für $y \notin B_2$.

Lösung: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X. Zu je zwei Basismengen B_1 und B_2 in $\mathcal{B}$ mit $\overline{B}_1 \subset B_2$, also $\overline{B}_1 \cap B_2^c = \emptyset$, gibt es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $f_{B_1,B_2}\colon X \to [0,1]$ mit $f|_{\overline{B}_1} = 1$ und $f|_{B_2^c} = 0$. Setze

$$\mathcal{F} := \{f_{B_1,B_2} : B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ \overline{B}_1 \subset B_2\}$$

Dann ist $\mathcal{F}$ abzählbar, da $\mathcal{B}$ abzählbar ist. Ist nun $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es $B_2 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_2 \subset U$. Weil X insbesondere regulär ist, gibt es $O \subset X$ offen mit $x \in O \subset \overline{O} \subset B_2$. Wähle $B_1 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_1 \subset O_1$. Dann ist $x \in \overline{B}_1 \subset B_2 \subset U$ und somit $f_{B_1,B_2}(x) = 1$ und $f_{B_1,B_2}|_{U^c} = 0$. Die Menge $\mathcal{F}$ hat also die gewünschten Eigenschaften.

(b) Die Abbildung $F\colon X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$, $x \mapsto (f(x))_{f\in\mathcal{F}}$ ist injektiv und stetig. Wir versehen $Y := F(X)$ mit der Spurtopologie von $[0,1]^{\mathcal{F}}$. (2)

Lösung: Die Funktion F ist komponentenweise stetig und somit stetig. Seien nun $x \neq y$ in X. Wähle $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin U$. Dann gibt es $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = 1$ und $f|_{U^c} = 0$, also insbesondere $f(y) = 0$. Also ist $f(x) \neq f(y)$ und somit $F(x) \neq F(y)$.

(c) Die Abbildung $F\colon X \to Y$ ist ein Homöomorphismus. (3)
Tipp: Um zu zeigen, dass $F(U)$, $U \subset X$ offen, in Y offen ist, betrachte Mengen der Form $Y \cap \pi_f^{-1}((0,\infty))$ für ein passendes $f \in \mathcal{F}$.

Lösung: Die Funktion ist nach dem vorigen Aufgabenteil injektiv und stetig nach Y und nach Wahl von Y auch surjektiv. Sei nun $U \subset X$ offen. Wir zeigen, dass $F(U)$ Umgebung (in Y) von allen seinen Elementen ist. Sei dazu $z \in F(U)$. Wähle $x \in U$ mit $F(x) = z$ und $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = 1$ und $f|_{U^c} = 0$. Dann ist $O := \pi_f^{-1}((0,\infty))$ offen in $[0,1]^{\mathcal{F}}$ und somit $O \cap Y$ offen in Y. Nach Wahl von f ist $z \in O$ und $F(y) \notin O$ für $y \notin U$. Das zeigt $z \in O \cap Y \subset F(U)$, also dass $F(U)$ eine Umgebung von z ist. Wir haben bewiesen, dass $F(U)$ für jede offene Menge U offen ist.

(d) X ist metrisierbar. (3)

Lösung: Nach Satz 7.7 ist $[0,1]^{\mathcal{F}}$ als abzählbares Produkt metrischer Räume metrisierbar und somit auch Y als Unterraum eines metrisierbaren Raumes metrisierbar. Also ist X homöomorph zu einem metrisierbaren Raum. Wir zeigen im Folgenden noch, dass daraus die Metrisierbarkeit von X folgt.

Hilfssatz: Sei (M,d) ein metrischer Raum, X ein topologischer Raum und $f\colon X \to M$ ein Homöomorphismus. Dann ist X metrisierbar. Definiere dazu $d_X(x,y) := d(f(x), f(y))$. Dann ist d_X eine Metrik auf X. Es ist zu zeigen, dass d_X die Topologie von X induziert. Sei dazu (x_n) eine Folge in X. Dann gilt $x_n \to x$ genau dann, wenn $f(x_n) \to f(x)$ gilt, also genau für $d_X(x_n, x) = d(f(x_n), f(x)) \to 0$. Die metrische

Topologie auf X induziert also denselben Begriff der Folgenkonvergenz wie die gegebene Topologie. Weil M und somit auch X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, folgt daraus die Behauptung.

33. Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, falls die einzigen zusammenhängenden Mengen in X die leere Menge und die einelementigen Mengen sind. Zeige:

(a) In der diskreten Topologie ist jeder Raum total unzusammenhängend. (3)

Lösung: Sei $M \subset X$ und seien $x \neq y$ Punkte in M. Die Mengen $O_1 := \{x\}$ und $O_2 := M \setminus \{x\}$ sind offen und es gilt $M \subset O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \neq \emptyset$, $M \cap O_2 \neq \emptyset$ und $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Also ist M unzusammenhängend.

(b) $\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend in der euklidischen Topologie. (3)

Lösung: Sei $M \subset \mathbb{Q}$ und seien $p < q$ Punkte in M. Wähle eine reelle Zahl $r \in (p,q) \setminus \mathbb{Q}$ und setze $O_1 := (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$ und $O_2 := (r, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Dann sind O_1 und O_2 offen in $\mathbb{Q}$ und es gilt $M \subset O_1 \cup O_2 = \mathbb{Q}$, $O_1 \cap O_2 \cap M = \emptyset$, $p \in M \cap O_1 \neq \emptyset$ und $q \in M \cap O_2 \neq \emptyset$. Also ist M unzusammenhängend.

(c) $\mathbb{R}$ ist bezüglich der Sorgenfrey-Topologie total unzusammenhängend. (3)

Lösung: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und seien $x < y$ Punkte in M. Die Mengen $O_1 := (-\infty, y)$ und $O_2 := [y, \infty)$ sind offen in der Sorgenfrey-Topologie und es gilt $M \subset \mathbb{R} = O_1 \cup O_2$, $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $x \in M \cap O_1 \neq \emptyset$ und $y \in M \cap O_2 \neq \emptyset$. Also ist M unzusammenhängend.

34. Die Räume $(0,1)$ und $[0,1)$ sind nicht homöomorph. (+3)

Lösung: Sei $f\colon [0,1) \to (0,1)$ injektiv und stetig und $y := f(0)$. Dann ist $f|_{(0,1)}\colon (0,1) \to (0,1) \setminus \{y\}$ stetig und somit $f((0,1))$ eine zusammenhängende Teilmenge von $(0,1) \setminus \{y\}$. Weil $f((0,1))$ damit laut Vorlesung ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist, folgt, dass $f|_{(0,1)}$ und somit auch f nicht surjektiv ist. Also gibt es keine bijektive stetige Abbildung von $[0,1)$ nach $(0,1)$ und insbesondere keinen Homöomorphismus.

Alternativlösung: Sei $f\colon [0,1) \to (0,1)$ injektiv und stetig. Dann ist f streng monoton. Ist f monoton wachsend, so ist $f(0)$ ein minimales Element in $f([0,1))$. Da $(0,1)$ aber kein minimales Element besitzt, kann f nicht surjektiv sein und somit insbesondere kein Homöomorphismus. Der Fall, dass f monoton fällt, verläuft analog.