Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 90

Universität Ulm

Abgabe: Montag, 25.07.2011

Elemente der Topologie: Klausur 1

1. (a) Definieren Sie den Begriff *topologische Basis*! (10)

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine topologische Basis über dem Grundraum $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Definitionen, dass

$$\mathcal{T} := \{O \subset \Omega \mid \forall x \in O \; \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset O\}$$

eine Topologie auf Ω ist! (10)

2. (a) Definieren Sie den Begriff *normaler topologischer Raum*! (10)

(b) Sei X ein Hausdorff-Raum. Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jeder stetigen Funktion $f\colon A \to [0,1]$ gebe es eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,1]$ mit $g|_A = f$. Zeigen Sie, dass X normal ist! (10)

3. (a) Definieren Sie den Begriff *gerichtete Menge*! (10)

(b) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum Ω und x ein Häufungswert von $(x_i)_{i \in I}$. Zeigen Sie, dass ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$ gegen x konvergiert! (10)

4. Sei $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen, wobei $\{0,1\}$ jeweils die diskrete Topologie $\mathcal{P}(\{0,1\})$ trage. Der Linksshift $\ell\colon X \to X$ ist mittels $\ell((b_k)_{k \in \mathbb{N}}) := (b_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie, dass ℓ stetig ist. (10)

5. Zeigen Sie, dass es eine Folge gibt, die einen Häufungswert, aber keine konvergente Teilfolge besitzt, indem Sie eine solche explizit angeben und durch Verweis auf die entsprechenden Resultate aus der Vorlesung oder Übung begründen, dass sie die gewünschten Eigenschaften hat! (10)

6. Sei X ein topologischer Raum, $Y \neq \emptyset$ eine Menge und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Funktion. Der Raum Y sei bezüglich der von f vorwärts induzierten Topologie zusammenhängend und zudem sei $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$ eine zusammenhängende Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass dann X zusammenhängend ist! (10)
Erinnerung: Die von f vorwärts induzierte Topologie ist $\{O \subset Y : f^{-1}(O) \subset X \text{ offen}\}$.
Anleitung: Seien O_1 und O_2 offen mit $X = O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Mengen $U_k := \{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset O_k\}$ offen sind und $U_1 \cup U_2 = Y$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ erfüllen!