Universität Ulm

Abgabe: Montag, 26.09.2011

Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 100

Elemente der Topologie: Klausur 2

1. (a) Definieren Sie den Begriff *Stetigkeit in* $x \in X$ für eine Funktion $f\colon X \to Y$ mit topologischen Räumen X und Y. (10)

(b) Seien X und Y topologische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit Grenzwert x gelte $f(x_i) \to f(x)$. Zeigen Sie, dass f stetig in x ist! (10)

2. (a) Definieren Sie die *Produkttopologie* des Produkts einer Familie $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ topologischer Räume! (10)

(b) Die Menge $\mathrm{C}[0,1] \coloneqq \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist dicht in $\mathbb{R}^{[0,1]}$. (10)

3. (a) Definieren Sie den Begriff *Kompaktheit* für einen topologischen Raum! (10)

(b) Sei Ω ein Hausdorff-Raum und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen ist! (10)

4. Zeigen Sie, dass der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bezüglich der Produkttopologie total unzusammenhängend ist, d.h. jede Teilmenge mit mindestens zwei Elementen unzusammenhängend ist! (10)

5. Zeigen Sie, dass es eine normalen topologischen Raum gibt, der nicht metrisierbar ist, indem Sie einen solchen explizit angeben und durch Verweis auf die entsprechenden Resultate aus der Vorlesung oder Übung begründen, dass er die gewünschten Eigenschaften hat! (10)

6. Sei X ein Hausdorff-Raum, für den jeder Unterraum bezüglich der Spurtopologie normal ist. Seien A_1 und A_2 Teilmengen von X mit $\overline{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es offene Mengen O_1 und O_2 gibt mit $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. (10)
Tipp: Nutzen Sie aus, dass der Unterraum $X \setminus (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)$ normal ist.