Robin Nittka
Sommersemester 2011
Punktzahl: 100

Lösungen Elemente der Topologie: Klausur 2

1. (a) Definieren Sie den Begriff *Stetigkeit in* $x \in X$ für eine Funktion $f\colon X \to Y$ mit topologischen Räumen X und Y. (10)

Lösung: Die Funktion f heißt stetig in x, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ für jede Menge $U \in \mathcal{U}(f(x))$ richtig ist.

(b) Seien X und Y topologische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit Grenzwert x gelte $f(x_i) \to f(x)$. Zeigen Sie, dass f stetig in x ist! (10)

Lösung: Wir zeigen die Behauptung durch Kontraposition. Sei f unstetig in x. Dann gibt es $V \in \mathcal{U}(f(x))$ mit $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$, was gerade $U \not\subset f^{-1}(V)$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ bedeutet. Wähle zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ einen Punkt $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Wir fassen $\mathcal{U}(x)$ mittels $U_1 \geq U_2$ genau dann, wenn $U_1 \subset U_2$ als gerichtete Menge auf. Dann ist $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$ ein Netz in X. Ist $U_0 \in \mathcal{U}(x)$, so ist $x_U \in U \subset U_0$ für alle $U \geq U_0$, woraus $x_U \to x$ folgt. Andererseits ist aber $f(x_U) \notin V$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, also $f(x_U) \not\to f(x)$.

2. (a) Definieren Sie die *Produkttopologie* des Produkts einer Familie $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ topologischer Räume! (10)

Lösung: Setze $X \coloneqq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ und definiere $\pi_\beta\colon X \to X_\beta$ durch $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in I}) \coloneqq x_\beta$ für $\beta \in I$. Die Produkttopologie ist der Durchschnitt aller Topologien auf X, bezüglich der jede der Funktionen π_β stetig ist, also die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft.

(b) Die Menge $\mathrm{C}[0,1] \coloneqq \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist dicht in $\mathbb{R}^{[0,1]}$. (10)

Lösung: Sei $g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ beliebig und U eine Umgebung von g. Dann gibt es aufgrund der Form der Basismengen der Produkttopologie offene Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}$ und paarweise verschiedene Zahlen $t_k \in [0,1]$ mit

$$g \in B \coloneqq \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(t_k) \in I_k \text{ für } k = 1,\dots,n \right\} \subset U.$$

Es gibt eine stetige Funktion $f_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_0(t_i) = g(t_i)$ für $i = 1,\dots,n$, beispielsweise ein Interpolationspolynom oder eine stückweise lineare Funktion. Dann ist $f_0 \in \mathrm{C}[0,1] \cap B \subset \mathrm{C}[0,1] \cap U \neq \emptyset$. Weil dies für jede Umgebung U von g richtig war, folgt $g \in \overline{\mathrm{C}[0,1]}$. Weil g beliebig war, beweist das die Behauptung.

3. (a) Definieren Sie den Begriff *Kompaktheit* für einen topologischen Raum! (10)

Lösung: Ein topologischer Raum Ω heißt kompakt, wenn folgendes gilt: Ist $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von Ω mit $\Omega = \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha$, so gibt es eine endliche Menge $J \subset I$ mit $\Omega = \bigcap_{\alpha\in J} O_\alpha$.

(b) Sei Ω ein Hausdorff-Raum und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen ist! (10)

Lösung: Sei $y \notin K$ fest. Wegen der Hausdorff-Eigenschaft gibt es zu jedem $x \in K$ offene Mengen U_x und V_x mit $x \in U_x$, $y \in V_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$. Wähle zur offenen Überdeckung $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ eine Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{x\in E} U_x$ mit einer endlichen Menge $E \subset K$. Dann ist $V \coloneqq \bigcap_{x\in E} V_x$ als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen, und nach Konstruktion ist $y \in V$ und $V \cap K \subset V \cap \bigcup_{x\in E} U_x = \emptyset$. Also ist $K^c \in \mathcal{U}(y)$. Weil dies für jedes $y \in K^c$ richtig ist, ist K^c offen, also K abgeschlossen.

Alternativer Beweis: Wir zeigen die Netzabgeschlossenheit von K in Ω. Sei (x_i) ein Netz in K mit $x_i \to x \in \Omega$. Wegen Kompaktheit von K in der Spurtopologie gibt es ein Teilnetz von (x_i), das in K und somit auch in Ω gegen ein $y \in K$ konvergiert. Weil Teilnetze konvergenter Netze gegen den gleichen Grenzwert wie das Netz selbst konvergieren und Grenzwerte in Hausdorff-Räumen eindeutig sind, folgt $x = y \in K$.

4. Zeigen Sie, dass der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bezüglich der Produkttopologie total unzusammenhängend ist, d.h. jede Teilmenge mit mindestens zwei Elementen unzusammenhängend ist! (10)

Lösung: Sei $M \subset X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eine Menge mit mindestens zwei Elementen und seien $x \neq y$ Punkte in M. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$. Die Mengen $O_1 := \{z \in X : z_n = x_n\} = \pi_n^{-1}(\{x_n\})$ und $O_2 := \{z \in X : z_n = y_n\} = \pi_n^{-1}(\{y_n\})$ sind offen mit $O_1 \cup O_2 = X$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Also ist $M \subset O_1 \cup O_2$ und $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, was zeigt, dass M unzusammenhängend ist. Wir haben gezeigt, dass X total unzusammenhängend ist.

5. Zeigen Sie, dass es eine normalen topologischen Raum gibt, der nicht metrisierbar ist, indem Sie einen solchen explizit angeben und durch Verweis auf die entsprechenden Resultate aus der Vorlesung oder Übung begründen, dass er die gewünschten Eigenschaften hat! (10)

Lösung: Ein Beispiel eines solchen Raumes ist $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie, der hier mit $\mathbb{R}_\ell$ bezeichnet sei. Laut Übung ist $\mathbb{R}_\ell$ normal. Wäre $\mathbb{R}_\ell$ metrisierbar, so laut Vorlesung auch $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ als endliches Produkt metrisierbarer Räume. Das widerspricht aber dem Resultat der Vorlesung, dass $\mathbb{R}_\ell$ nicht normal ist, da laut Übung alle metrischen Räume normal sind.

Alternativlösung: Der Hausdorff-Raum $[0,1]^{[0,1]}$ ist nach dem Satz von Tychonoff kompakt und somit laut Vorlesung normal. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für diesen Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist, woraus folgt, dass der Raum nicht metrisierbar ist.

6. Sei X ein Hausdorff-Raum, für den jeder Unterraum bezüglich der Spurtopologie normal ist. Seien A_1 und A_2 Teilmengen von X mit $\overline{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es offene Mengen O_1 und O_2 gibt mit $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. (10)
Tipp: Nutzen Sie aus, dass der Unterraum $X \setminus (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)$ normal ist.

Lösung: Setze $Y := X \setminus (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)$. Es ist $Y \neq \emptyset$, da anderenfall $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = X$ wäre, woraus mit der Voraussetzung $A_1 = A_2 = \emptyset$ folgt, ein Widerspruch. Die Mengen $B_1 := \overline{A}_1 \cap Y$ und $B_2 := \overline{A}_2 \cap Y$ sind relativ abgeschlossen in Y und es ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ nach Wahl von Y. Da Y normal ist, gibt es somit relativ offene Teilmengen O_1 und O_2 von Y mit $B_1 \subset O_1$, $B_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Da Y offen ist, sind O_1 und O_2 offene Mengen in X. Zudem ist

$$A_1 = A_1 \setminus \overline{A}_2 \subset \overline{A}_1 \setminus \overline{A}_2 = B_1 \subset O_1$$

und analog dazu $A_2 \subset O_2$. Die Mengen O_1 und O_2 haben also alle verlangten Eigenschaften.

Bemerkung: Es gilt auch die Rückrichtung. Genauer: Gibt es zu je zwei Mengen A_1 und A_2 mit $\overline{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$ offene Mengen O_1 und O_2 mit $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, so ist jeder Unterraum Y von X normal. Seien nämlich $A_1 \subset Y$ und $A_2 \subset Y$ relativ abgeschlossene Teilmengen von Y, d.h. $A_1 = Y \cap A_1'$ und $A_2 = Y \cap A_2'$ mit abgeschlossenen Teilmengen A_1' und A_2' von X. Dann ist $\overline{A}_1 \subset A_1'$ und somit $\overline{A}_1 \cap A_2 \subset A_1' \cap Y \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Ebenso folgt $A_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$. Also sind A_1 und A_2 voneinander getrennt. Es gibt nach Voraussetzung also offene Mengen O_1' und O_2' mit $A_1 \subset O_1'$, $A_2 \subset O_2'$ und $O_1' \cap O_2' = \emptyset$. Dann sind die Mengen $O_1 := O_1' \cap Y$ und $O_2 := O_2' \cap Y$ relativ offen in Y und es gilt $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Wir haben nachgewiesen, dass Y normal ist.