Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 23 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

5. Skizziere die Mengen $B_{n,p} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \le 1\}$ für $(n,p) \in \{2,3\} \times \{1,2,\infty\}$. (6)
Erinnerung: $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2^2 := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$, $\|x\|_\infty := \max |x_k|$.

6. Zeige: Der Raum c_0 der Nullfolgen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist ein separabler Banachraum. (4)
Tipp: Man kann zuerst nachweisen, dass c_0 ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ ist.

7. Zeige:

(a) Die Menge $\ell^1 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$ ist ein Vektorraum. (1)

(b) Der Ausdruck $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ definiert eine Norm auf ℓ^1. (1)

(c) Der Raum $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig. (4)

(d) Der *positive Kegel* $\ell^1_+ := \{x \in \ell^1 : x_n \ge 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ ist abgeschlossen. (2)

8. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften für eine Menge $B \subset M$ äquivalent sind: (2)

1.) $A \subset B$, B ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge $C \subset M$ mit $A \subset C$ ist $B \subset C$.
Hinweis: Dies bedeutet, dass B die kleinste abgeschlossene Obermenge von A ist.

2.) $B = \bigcap_{C\in\mathcal{X}} C$, wobei $\mathcal{X} = \{C \subset M : A \subset C,\ C \text{ abgeschlossen}\}$

3.) $B = \{x \in M : \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } A, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert}\}$

Die eindeutig bestimmte Menge B, die obige drei Eigenschaften erfüllt, heißt *Abschluss von A* und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet. Zeige zudem:

(a) A ist genau dann beschränkt, wenn $\overline{A}$ beschränkt ist. (1)

(b) Die Menge A ist genau dann *relativ kompakt* (d.h.: $\overline{A}$ ist kompakt), wenn jede Folge in A eine (in M) konvergente Teilfolge besitzt. (2)