



Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

9. Sei $\alpha \in (0, 1]$. Der Raum der auf $[0, 1]$ zum Exponent α hölderstetigen Funktionen wird mit $C^{0,\alpha}[0, 1] := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{0,\alpha} < \infty\}$ bezeichnet, wobei $\|f\|_{0,\alpha} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$ die Hölderkonstante von f zum Exponent α ist. Zeige:

(a) $C^{0,\alpha}[0, 1]$ ist ein Vektorraum. (1)

(b) Eine Funktion $f \in C^{0,\alpha}[0, 1]$ ist genau dann konstant, wenn $\|f\|_{0,\alpha} = 0$ gilt. (1)

(c) Jede Funktion $f \in C^{0,\alpha}[0, 1]$ ist stetig auf $[0, 1]$, also $C^{0,\alpha}[0, 1] \subset C[0, 1]$. (1)

(d) Ist $f \in C^{0,\alpha}[0, 1]$, so ist $|f(x)| \leq \|f\|_{0,\alpha} + |f(0)|$ für alle $x \in [0, 1]$. (1)

(e) Die Menge $B_{0,\alpha} := \{f \in C^{0,\alpha}[0, 1] : |f(0)| + \|f\|_{0,\alpha} \leq 1\}$ ist eine relativ kompakte Teilmenge von $C[0, 1]$. (1)

(f) Ist $\alpha < \beta \in (0, 1]$, so ist $C^{0,\beta}[0, 1] \subset C^{0,\alpha}[0, 1]$. (1)

(g) Sei (f_n) eine Folge in $C^{0,\alpha}[0, 1]$, für die $\|f_n\|_{0,\alpha}$ beschränkt ist und deren punktweiser Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für jedes $x \in [0, 1]$ existiert. Dann ist $f \in C^{0,\alpha}[0, 1]$ und $\|f\|_{0,\alpha} \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{0,\alpha}$. (2)

(h) Die Abbildung $f \mapsto |f(0)| + \|f\|_{0,\alpha}$ definiert eine Norm auf $C^{0,\alpha}[0, 1]$. (1)

(i) $C^{0,\alpha}[0, 1]$ ist bezüglich der Norm aus (h) ein Banachraum. (3)

10. Zeige, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf $C[0, 1]$ gibt, welche die punktweise Konvergenz induziert, d.h. für welche folgende Aussagen für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[0, 1]$ äquivalent sind: (3)

1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0$.

Tipp: Betrachte hierzu beispielsweise eine Folge $\alpha_n e_n$, wobei $e_n(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in (0, \frac{1}{n})$, mit geeigneten α_n .

11. Seien $x, y \in c_0$. Wir sagen, dass $x \leq y$, falls $x_k \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Menge $[x, y] := \{a \in c_0 : x \leq a \leq y\}$ heißt *Ordnungsintervall* in c_0 . Zeige, dass $[x, y]$ in c_0 kompakt ist! (3)

12. Zeige die in der Vorlesung ausgelassene Richtung des Satzes von Arzela-Ascoli: Ist eine Teilmenge H von $C(K)$ relativ kompakt, so ist H gleichstetig und punktweise beschränkt. (4)