Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 21 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

25. Sei E ein reeller oder komplexer Vektorraum und a eine symmetrische Sesquilinearform auf E. Zeige:

(a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist
$$a(x,y) = \frac{a(x+y,x+y) - a(x-y,x-y)}{4},$$
und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist
$$a(x,y) = \frac{a(x+y,x+y) - a(x-y,x-y) + ia(x+iy,x+iy) - ia(x-iy,x-iy)}{4}$$
für alle $x, y \in E$. (2)
Bemerkung: Man nennt dies die *Polarisationsgleichung*.

(b) Sind a und b symmetrische Sesquilinearformen auf E mit $a(x,x) = b(x,x)$ für alle $x \in E$, so ist $a = b$. (1)

(c) Für alle $x, y \in E$ ist $a(x+y,x+y) + a(x-y,x-y) = 2a(x,x) + 2a(y,y)$. (1)
Bemerkung: Man nennt dies die *Parallelogrammgleichung*.

(d) Seien H_1 und H_2 Prähilberträume. Eine lineare Abbildung $T\colon H_1 \to H_2$ heißt *unitär*, falls sie bijektiv ist und $(Tx|Ty) = (x|y)$ für alle $x, y \in H_1$ gilt. Zeige, dass eine lineare Abbildung $T\colon H_1 \to H_2$ genau dann unitär ist, wenn sie surjektiv und isometrisch ist! (2)

26. Sei H ein Prähilbertraum und $M = \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ eine Menge von orthonormalen Vektoren. Zeige, dass M linear unabhängig ist! (2)

27. Sei H ein Prähilbertraum und $M \subset H$. Zeige, dass dann $M^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp$ gilt! (2)

28. Sei $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ die Funktion fm in $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ liegt. Hier bezeichnet $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ den abgeschlossenen Teilraum von $\mathrm{C}(\mathbb{R})$, der aus den Funktionen besteht, die bei ∞ und bei $-\infty$ gegen 0 konvergieren. Zeige, dass m dann stetig und beschränkt ist! (4)

29. Seien X und Y Banachräume. Wir sagen, dass $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ abgeschlossenes Bild hat, wenn die Menge $\operatorname{Rg} T := T(X)$ abgeschlossen ist. Definiere
$$\mathcal{R}(X,Y) := \{T \in \mathscr{L}(X,Y) : T \text{ ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild}\}$$
Zeige:

(a) Für $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ sind äquivalent: (4)
   (i) Es gibt $c > 0$ mit $\|Tx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in X$.
   (ii) $T \in \mathcal{R}(X,Y)$.

(b) $\mathcal{R}(X,Y)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,Y)$. (2)

(c) Ist $\dim E < \infty$, so liegt eine lineare Abbildung $T\colon E \to Y$ genau dann in $\mathcal{R}(E,Y)$, wenn sie injektiv ist. (1)

Die Übungsblätter sowie aktuelle Informationen sind unter folgender Adresse verfügbar:

http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws0809/fa.html