Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

UNIVERSITÄT ULM

Gesamt: 21 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

25. Sei E ein reeller oder komplexer Vektorraum und a eine symmetrische Sesquilinearform auf E. Zeige:

(a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist

$$a(x, y) = \frac{a(x + y, x + y) - a(x - y, x - y)}{4},$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist

$$a(x, y) = \frac{a(x + y, x + y) - a(x - y, x - y) + ia(x + iy, x + iy) - ia(x - iy, x - iy)}{4}$$

für alle $x, y \in E$. (2)

Bemerkung: Man nennt dies die *Polarisationsgleichung*.

Lösung: Wir behandeln nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der reelle Fall ist ähnlich, aber einfacher. Durch Ausmultiplizieren und Ausnutzen der Sesquilinearität sieht man, dass die rechte Seite gleich

$$\begin{aligned}\frac{2a(x, y) + 2a(y, x) + 2ia(x, iy) + 2ia(iy, x)}{4} &= \frac{a(x, y) + a(y, x) + a(x, y) - a(y, x)}{2} \\ &= a(x, y)\end{aligned}$$

ist.

(b) Sind a und b symmetrische Sesquilinearformen auf E mit $a(x, x) = b(x, x)$ für alle $x \in E$, so ist $a = b$. (1)

Lösung: Nach Voraussetzung stimmen die rechten Seiten in obigen Gleichungen für $a(x, y)$ und $b(x, y)$ überein. Also ist auch $a(x, y) = b(x, y)$ für alle $x, y \in E$, was gerade $a = b$ bedeutet.

(c) Für alle $x, y \in E$ ist $a(x + y, x + y) + a(x - y, x - y) = 2a(x, x) + 2a(y, y)$. (1)

Bemerkung: Man nennt dies die *Parallelogrammgleichung*.

Lösung:

$$\begin{aligned}a(x + y, x + y) + a(x - y, x - y) &= 2a(x, x) + 2a(y, y) + a(x, y) + a(y, x) - a(x, y) - a(y, x) \\ &= 2a(x, x) + 2a(y, y)\end{aligned}$$

(d) Seien H_1 und H_2 Prähilberträume. Eine lineare Abbildung $T\colon H_1 \to H_2$ heißt *unitär*, falls sie bijektiv ist und $(Tx|Ty) = (x|y)$ für alle $x, y \in H_1$ gilt. Zeige, dass eine lineare Abbildung $T\colon H_1 \to H_2$ genau dann unitär ist, wenn sie surjektiv und isometrisch ist! (2)

Lösung: Sei zuerst T unitär. Dann ist T insbesondere bijektiv und damit surjektiv. Zudem gilt

$$\|Tx\|_{H_2}^2 = (Tx|Tx)_{H_2} = (x|x)_{H_1} = \|x\|_{H_1}^2$$

nach Definition der Unitarität. Also ist T isometrisch.

Sei nun T isometrisch und surjektiv. Sind $x, y \in H_1$ und $Tx = Ty$, dann folgt

$$\|x - y\|_{H_1} = \|T(x - y)\|_{H_2} = \|Tx - Ty\|_{H_2} = 0,$$

also $x = y$. Dies zeigt, dass T injektiv ist, also insgesamt bijektiv. Für die symmetrischen Sesquilinearformen $a(x,y) := (x|y)$ und $b(x,y) := (Tx|Ty)$ gilt nach Voraussetzung $a(x,x) = b(x,x)$ für alle $x \in H_1$. Also ist

$$(x|y) = a(x,y) = b(x,y) = (Tx|Ty)$$

für alle $x, y \in H_1$, woraus folgt, dass T unitär ist.

26. Sei H ein Prähilbertraum und $M = \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ eine Menge von orthonormalen Vektoren. Zeige, dass M linear unabhängig ist! (2)

Lösung: Eine Menge heißt linear unabhängig, wenn alle ihre endlichen Teilmengen linear unabhängig sind. Sei also $\{e_1, \ldots, e_N\} \subset M$ eine N-elementige endliche Teilmenge von M und seien $\lambda_k \in \mathbb{K}$ so, dass $\sum_{k=1}^N \lambda_k e_k = 0$ ist. Dann folgt für jedes $\ell \in \{1, \ldots, N\}$

$$0 = (0|e_\ell) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \, (e_k|e_\ell) = \lambda_\ell,$$

also $\lambda_\ell = 0$ für alle ℓ. Es gibt also keine nicht-triviale Linearkombination der 0, was definitionsgemäß bedeutet, dass $\{e_1, \ldots, e_N\}$ linear unabhängig ist. Also ist M linear unabhängig.

27. Sei H ein Prähilbertraum und $M \subset H$. Zeige, dass dann $M^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp$ gilt! (2)

Lösung: Die Inklusion $\left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp \subset M^\perp$ ist klar: Steht ein Vektor senkrecht auf jedem Vektor in $\overline{\operatorname{span} M}$, so insbesondere auch auf jedem Vektor in M. Sei nun also $x \in M^\perp$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $(x|y) = 0$ für alle $y \in \overline{\operatorname{span} M}$ gilt, da dann $x \in \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp$ folgt. Sei zuerst $y \in \operatorname{span} M$, also $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k m_k$ mit $m_k \in M$. Dann ist wegen Sesquilinearität

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \, (x|m_k) = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \cdot 0 = 0.$$

Ist nun $y \in \overline{\operatorname{span} M}$, so gibt es $y_n \in \operatorname{span} M$ mit $y_n \to y$. Wegen Stetigkeit folgt

$$(x|y) = \lim_{n\to\infty} (x|y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Die Behauptung ist damit gezeigt.

28. Sei $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ die Funktion fm in $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ liegt. Hier bezeichnet $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ den abgeschlossenen Teilraum von $\mathrm{C}(\mathbb{R})$, der aus den Funktionen besteht, die bei ∞ und bei $-\infty$ gegen 0 konvergieren. Zeige, dass m dann stetig und beschränkt ist! (4)

Lösung: Die Stetigkeit von m ist leicht zu sehen. Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$g_n(x) := \begin{cases} x + (n+1), & x \in [-n-1, -n], \\ 1, & x \in (-n, n), \\ -x + (n+1), & x \in [n, n+1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man prüft einfach nach, dass $g_n \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ gilt. Nun stimmt aber $g_n m$ auf $(-n, n)$ mit m überein und ist nach Voraussetzung stetig. Also ist m stetig auf jedem Intervall $(-n, n)$, und somit auch auf ganz $\mathbb{R}$.

Betrachte nun den Operator $T_m\colon \mathrm{C}_0(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$, der durch $T_m f := mf$ definiert ist. Offenbar ist T_m linear. Wir prüfen nach, dass T_m auch abgeschlossen ist. Sei dazu also

(f_n) eine Folge in $C_0(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass (f_n) gegen $f \in C_0(\mathbb{R})$ und (Tf_n) gegen $g \in C_0(\mathbb{R})$ konvergiert. Inbesondere gilt dann $f_n(x) \to f(x)$ und $m(x)f_n(x) \to g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil aber selbstverständlich auch $m(x)f_n(x) \to m(x)f(x)$ gilt, folgt mit der Eindeutigkeit von Grenzwerten in $\mathbb{K}$ unmittelbar $(T_m f)(x) = m(x)f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $T_m f = g$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist T_m beschränkt.

Wegen $\|g_n\|_\infty = 1$ gilt also

$$\sup_{x\in[-n,n]} |m(x)| = \sup_{x\in[-n,n]} |(T_m g_n)(x)| \le \|T_m g_n\|_\infty \le \|T_m\| \|g_n\|_\infty = \|T_m\|$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher $\|m\|_\infty \le \|T_m\|$. Also ist m beschränkt.

29. Seien X und Y Banachräume. Wir sagen, dass $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ abgeschlossenes Bild hat, wenn die Menge $\operatorname{Rg} T := T(X)$ abgeschlossen ist. Definiere

$$\mathcal{R}(X,Y) := \{T \in \mathscr{L}(X,Y) : T \text{ ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild}\}$$

Zeige:

(a) Für $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ sind äquivalent: (4)

(i) Es gibt $c > 0$ mit $\|Tx\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in X$.

(ii) $T \in \mathcal{R}(X,Y)$.

Lösung: Es gebe $c > 0$ mit $\|Tx\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in X$. Ist $x \ne 0$, so folgt also $\|Tx\| > 0$ und daher $Tx \ne 0$. Daher ist $\operatorname{Kern} T = \{0\}$, also T injektiv. Sei nun (y_n) eine Folge in $\operatorname{Rg} T$, die gegen $y \in Y$ konvergiert. Es ist zu zeigen, dass y wieder in $\operatorname{Rg} T$ liegt. Nach Definition des Bildes gibt es eine Folge (x_n) in X mit $y_n = Tx_n$. Zudem gilt

$$\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{c}\|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$

Weil (y_n) konvergent ist, ist es insbesondere eine Cauchy-Folge. Daher ist auch (x_n) eine Cauchy-Folge, wie man aus obiger Abschätzung sieht. Also konvergiert (x_n) gegen einen Grenzwert $x \in X$. Wegen Stetigkeit konvergiert dann $(Tx_n) = (y_n)$ gegen Tx. Also ist wegen Eindeutigkeit des Grenzwerts $Tx = y$ und insbesondere $y \in \operatorname{Rg} T$. Wir haben gezeigt, dass $\operatorname{Rg} T$ abgeschlossen ist. Insgesamt ist also $T \in \mathcal{R}(X,Y)$.

Sei nun $T \in \mathcal{R}(X,Y)$. Der Fall $X = \{0\}$ ist trivial. Im Folgenden dürfen wir nun also $X \ne \{0\}$ angenommen. Definiere $U := \operatorname{Rg} T \subset Y$. Dann ist $T\colon X \to U$ stetig und bijektiv. Nach Voraussetzung ist U abgeschlossen in Y, also wieder ein Banachraum. Nach dem Satz über die beschränkte Inverse gibt es also einen Operator $S \in \mathscr{L}(U,X)$ mit $ST = I_X$ und $TS = I_U$. Offenbar ist $S \ne 0$, also $\|S\| \ne 0$. Zudem ist

$$\|x\| = \|STx\| \le \|S\|\|Tx\|$$

für alle $x \in X$. Setzt man nun $c := \frac{1}{\|S\|} > 0$, so zeigt dies $\|Tx\| \ge c\|x\|$ wie behauptet.

(b) $\mathcal{R}(X,Y)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,Y)$. (2)

Lösung: Sei $T \in \mathcal{R}(X,Y)$ beliebig und $c_T > 0$ so gewählt, dass $\|Tx\| \ge c_T\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Setze $\varepsilon := \frac{c_T}{2}$. Ist nun $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ und $\|S - T\| < \varepsilon$, so folgt

$$\|Sx\| \ge \|Tx\| - \|Sx - Tx\| \ge c_T\|x\| - \varepsilon\|x\| \ge c_S\|x\|.$$

mit $c_S := c_T - \varepsilon = \frac{c_T}{2} > 0$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist dann $S \in \mathcal{R}(X,Y)$. Wir haben also gezeigt, dass $B(T,\varepsilon) \subset \mathcal{R}(X,Y)$ gilt, also jeder Punkt von $\mathcal{R}(X,Y)$ bereits innerer Punkt von $\mathcal{R}(X,Y)$ ist. Das bedeutet gerade, dass $\mathcal{R}(X,Y)$ offen ist.

(c) Ist $\dim E < \infty$, so liegt eine lineare Abbildung $T\colon E \to Y$ genau dann in $\mathcal{R}(E,Y)$, wenn sie injektiv ist. (1)

Lösung: Ist T in $\mathcal{R}(E,Y)$, so ist T nach Definition injektiv.

Ist aber T eine beliebige injektive lineare Abbildung von E nach Y, so ist T laut Aufgabe 17(b) stetig, also $T \in \mathscr{L}(E,Y)$. Es muss nur noch gezeigt werden, dass $\operatorname{Rg} T$ abgeschlossen ist. Offenbar ist $\operatorname{Rg} T$ endlich-dimensional; für eine Basis $(e_n)_{n=1}^N$ von E ist nämlich $(Te_n)_{n=1}^N$ ein endliches Erzeugendensystem von $\operatorname{Rg} T$ und genauer gesagt sogar eine Basis. Laut Vorlesung sind endlich-dimensionale Räume vollständig und vollständige Unterräume stets abgeschlossen. Daher ist $\operatorname{Rg} T$ abgeschlossen in Y. Wir haben $T \in \mathcal{R}(E,Y)$ gezeigt.