Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8

30. Sei H ein Prähilbertraum. Zeige:

(a) Für $u, v \in H$ gilt genau dann $(u|v) = \|u\|\,\|v\|$, wenn eine der beiden Eigenschaften $v = 0$ oder $u = \lambda v$ mit $\lambda \geq 0$ erfüllt ist. (2)
Tipp: Untersuche im Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, wann Gleichheit herrscht.

(b) Sind $u \neq v$ aus H, $\|u\| = \|v\| = 1$ und $\alpha \in (0,1)$, so folgt $\|\alpha u + (1-\alpha)v\| < 1$. (2)

31. (a) Berechne die Fourierreihe der Funktion $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$, $f(x) := |x - \pi|$ für $x \in [0, 2\pi]$! (2)

(b) Zeige folgende Identität: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ (1)
Tipp: Man kann die Parseval'sche Gleichung nutzen.

(c) Folgere hieraus: $\zeta(4) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (2)

32. (a) Sei H ein Prähilbertraum, X ein Vektorraum und $U\colon H \to X$ linear und bijektiv. Zeige, dass dann $(x|y)_X := \big(U^{-1}x \big| U^{-1}y\big)_H$ ein Skalarprodukt auf X definiert und dass bezüglich dieses Skalarprodukts U ein unitärer Isomorphismus von H nach X ist! (3)

(b) Sei $w = (w_n)$ eine reelle Folge mit $w_n \in (0, \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\ell^2_w := \Big\{ (x_n) : x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^2 < \infty \Big\}$$

und $(x|y)_w := \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n \overline{y}_n$. Zeige, dass ℓ^2_w mittels $(\cdot|\cdot)_w$ zu einem separablen Hilbertraum wird, und gib einen unitären Operator $U\colon \ell^2 \to \ell^2_w$ an! (4)
Tipp: Findet man zuerst ein passendes U, so kann man darauf den ersten Aufgabenteil anwenden, statt alle Eigenschaften von ℓ^2_w direkt nachzurechnen.

33. Es sei $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ wie üblich definiert, also $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf ℓ^2 mit den Eigenschaften, dass $(\ell^2, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist und dass die Zuordnung $\varphi_m\colon \ell^2 \to \mathbb{K}, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Zeige, dass die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|$ dann bereits äquivalent sind! (4)
Tipp: Man kann den Satz über den abgeschlossenen Graphen anwenden.

Bonusaufgabe: (5 Punkte)
Seien H_1 und H_2 reelle Prähilberträume und $\varphi\colon H_1 \to H_2$ eine (möglicherweise nicht-lineare) isometrische Abbildung, also $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ für $x, y \in H_1$. Zeige, dass es dann $z \in H_2$ und einen isometrischen linearen Operator $U\colon H_1 \to H_2$ mit $\varphi(x) = z + Ux$ für $x \in H_1$ gibt!
Tipp: Definiere $z := \varphi(0)$ und $\psi(x) := \varphi(x) - z$. Zeige $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)$ und schlussfolgere daraus $(\psi(x)|\psi(y)) = (x|y)$. Benutze dies, um zu zeigen, dass ψ linear ist.