Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 23 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

34. Sei H ein Prähilbertraum, $C \subset H$ vollständig und konvex, $C \neq \emptyset$ und P_C die orthogonale Projektion von H auf C. Zeige, dass dann $P_C(P_C(x)) = P_C(x)$ und

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in H$ gilt! Schlussfolgere, dass P_C stetig ist! (3)
Tipp: Laut Vorlesung gilt für alle $z \in C$ die Abschätzung $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|z - P_C(x)) \leq 0$ und eine analoge Ungleichung für y. Setze für z geeignete Werte ein, um $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2$ abzuschätzen.

Lösung: Es folgt aus der Definition, dass $P_C(x) = x$ für $x \in C$ gilt. Wegen $P_C(x) \in C$ folgt also $P_C(P_C(x)) = P_C(x)$ für alle $x \in H$. Ist $P_C(x) = P_C(y)$, so ist die Ungleichung trivial. Sei also $P_C(x) \neq P_C(y)$. Setzt man im Tipp $z = P_C(y) \in C$ ein, ergibt sich $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|P_C(y) - P_C(x)) \leq 0$ und umgeformt

$$\|P_C(x)\|^2 - \operatorname{Re}(P_C(x)|P_C(y)) \leq -\operatorname{Re}(x|P_C(y) - P_C(x)).$$

Analog erhält man

$$\|P_C(y)\|^2 - \operatorname{Re}(P_C(y)|P_C(x)) \leq -\operatorname{Re}(y|P_C(x) - P_C(y)).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 &= \|P_C(x)\|^2 - 2\operatorname{Re}(P_C(x)|P_C(y)) + \|P_C(y)\|^2 \\ &\leq -\operatorname{Re}(x|P_C(y) - P_C(x)) - \operatorname{Re}(y|P_C(x) - P_C(y)) \\ &= \operatorname{Re}(x - y|P_C(x) - P_C(y)) \leq \|x - y\|\,\|P_C(x) - P_C(y)\|.\end{aligned}$$

Teilt man durch $\|P_C(x) - P_C(y)\|$, ergibt sich die Behauptung.

Die Aufgabe zeigt, dass P_C sogar Lipschitz-stetig ist. Man kann auf verschiedene Arten nachweisen, dass daraus Stetigkeit folgt, beispielsweise indem man beobachtet, dass aus $x_n \to x$ auch $P_C(x_n) \to P_C(x)$ folgt.

35. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$. Zeige:

(a) $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}$. (3)

Lösung: Setze $F := \overline{\operatorname{span} M}$. Sei zuerst $x \in F$. Sei $y \in M^\perp$ beliebig gewählt. Dann ist nach Aufgabe 27 $y \in F^\perp$, also $(y|z) = 0$ für alle $z \in F$. Insbesondere ist $(y|x) = 0$. Weil $y \in M^\perp$ beliebig war, zeigt dies $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$. Also ist $F \subset \left(M^\perp\right)^\perp$.

Sei nun $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$ beliebig gewählt. Die Menge F ist ein abgeschlossener und daher vollständiger Unterraum von H. Sei P die orthogonale Projektion auf F. Laut Vorlesung ist P linear. Daher ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 := Px \in F$ und $x_2 := (I - P)x$. Natürlich ist $x_2 \in F^\perp$, denn für $y \in F$ gilt

$$(x_2|y) = ((I - P)x|Py) = (P(I - P)x|y) = \left((P^2 - P)x\middle|y\right) = 0.$$

Wegen $F^\perp = M^\perp$ und $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$ bedeutet dies

$$0 = (x_2|x) = (x_2|x_1 + x_2) = (x_2|x_1) + \|x_2\|^2 = \|x_2\|^2,$$

denn $x_1 \in F$ und $x_2 \in F^\perp$ stehen aufeinander senkrecht. Dies zeigt $x_2 = 0$, also $x = x_1 \in F$. Also ist auch $\left(M^\perp\right)^\perp \subset F$.

(b) Ist $X \subset H$ und $X^\perp = M^\perp$, so ist $X \subset \overline{\operatorname{span} X} = \overline{\operatorname{span} M}$. (1)

Lösung: Aus dem ersten Teil folgt

$$X \subset \overline{\operatorname{span} X} = \left(X^\perp\right)^\perp = \left(M^\perp\right)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}.$$

(c) M ist genau dann total, wenn $M^\perp = \{0\}$ gilt. (1)

Lösung: Sei $M^\perp = \{0\}$, also $M^\perp = H^\perp$. Nach dem zweiten Aufgabenteil folgt daraus $\overline{\operatorname{span} M} = \overline{\operatorname{span} H} = H$. Also ist M total.

Sei nun M total. Dann ist nach Aufgabe 27 $M^\perp = \overline{\operatorname{span} M}^\perp = H^\perp = \{0\}$.

(d) Ein Orthonormalsystem (e_n) ist genau dann eine Orthonormalbasis von H, wenn $\{x \in H : (x|e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ gilt. (1)

Lösung: Sei $E := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Das Orthonormalsystem ist definitionsgemäß genau dann eine Basis, wenn E total ist. Das ist nach der vorigen Teilaufgabe genau dann der Fall, wenn

$$\{x \in H : (x|e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\} = E^\perp = \{0\}$$

gilt. Damit ist die Aussage bewiesen.

36. Sei E ein normierter Raum, $A, B \subset E$. Zeige:

(a) Sind A und B konvex, so sind auch $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$ konvex. (2)

Lösung: Seien $x, y \in A + B$, $\lambda \in [0, 1]$. Dann gibt es $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ mit $x = a_1 + b_1$ und $y = a_2 + b_2$. Nach Voraussetzung ist $a := \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ wieder in A und $b := \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2$ wieder in B. Also ist

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda a_1 + \lambda b_1 + (1 - \lambda)a_2 + (1 - \lambda)b_2 = a + b \in A + B.$$

Dies zeigt, dass $A + B$ konvex ist.

Seien nun $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in \alpha A$, $\lambda \in [0, 1]$. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $x = \alpha a$ und $y = \alpha b$. Nach Voraussetzung ist $c := \lambda a + (1 - \lambda)b$ wieder in A, also $\lambda x + (1 - \lambda)y = \alpha c \in \alpha A$. Dies zeigt, dass αA konvex ist.

(b) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ auch αB kompakt und $A + B$ und αA abgeschlossen. (2)

Lösung: Ist (x_n) eine Folge in αB, so gibt es $b_n \in B$ mit $x_n = \alpha b_n$. Wegen Kompaktheit besitzt (b_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $b \in B$. Dann konvergiert die entsprechende Teilfolge von (x_n) gegen $\alpha b \in \alpha B$. Dies zeigt die Kompaktheit von αB.

Sei (x_n) eine konvergente Folge in αA mit Grenzwert x. Ist $\alpha = 0$, so ist $\alpha A \subset \{0\}$ und daher abgeschlossen. Sei nun also $\alpha \neq 0$. Es gibt $a_n \in A$ mit $x_n = \alpha a_n$, also $a_n = \frac{x_n}{\alpha} \to a := \frac{x}{\alpha}$. Wegen Abgeschlossenheit von A ist $a \in A$, also $x = \alpha a \in \alpha A$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von αA auch für $\alpha \neq 0$.

Sei nun (x_n) eine konvergente Folge in $A + B$ mit Grenzwert x. Dann gibt es $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit $x_n = a_n + b_n$. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass (b_n) gegen ein $b \in B$ konvergiert. Daraus folgt $a_n = x_n - b_n \to x - b =: a$. Wegen Abgeschlossenheit von A ist $a \in A$. Also erhält man $x = a + b \in A + B$. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von $A + B$.

37. Zeige:

(a) Ist $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie konvexer Teilmengen eines Vektorraums V, so ist auch $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ konvex. (1)

Lösung: Setze $C := \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$. Seien $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist für jedes $\alpha \in I$ auch $x, y \in C_\alpha$. Nach Voraussetzung folgt also $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_\alpha$. Weil dies für alle $\alpha \in I$ gilt, folgt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Dies zeigt die Konvexität von C.

(b) Sei V ein Vektorraum und $C \subset V$ konvex. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $m_k \in C$. Dann gilt $\sum_{k=1}^n \lambda_k m_k \in C$. (2)
Tipp: Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir zeigen die Aussage durch Induktion. Für $n = 1$ ist $\lambda_1 = 1$ und es ist nichts mehr zu zeigen. Sei die Aussage nun für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig. Seien $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$, $m_k \in C$. Ist $\lambda_{n+1} \geq 1$, so folgt $\lambda_{n+1} = 1$ und $\lambda_k = 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$; in diesem Fall ist die Aussage trivial. Sei nun also $\lambda_{n+1} < 1$. Definiere $\mu_k := \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} > 0$ für $k \neq n+1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

Nach Induktionshypothese gilt also $c := \sum_{k=1}^n \mu_k m_k \in C$. Weil C konvex ist, folgt daraus wegen $\lambda_{n+1} \in [0, 1]$, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k m_k = \lambda_{n+1} m_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} m_k = \lambda_{n+1} m_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) c$$

ebenfalls in C liegt. Damit ist der Induktionsschritt durchgeführt, die Aussage also für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Sei V ein Vektorraum und $M \subset V$. Dann ist (3)

$$\operatorname{co}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k : \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, m_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lösung: Bezeichne C die Menge auf der rechten Seite. Nach Definition ist $\operatorname{co}(M)$ der Durchschnitt aller konvexen Obermengen von M, also auch selbst wieder eine Obermenge von M. Nach dem ersten Aufgabenteil ist $\operatorname{co}(M)$ konvex. Der zweite Aufgabenteil zeigt, dass aus diesen beiden Tatsachen $C \subset \operatorname{co}(M)$ folgt.

Offenbar gilt $M \subset C$. Kann man nun zeigen, dass C konvex ist, so folgt aus der Definition von $\operatorname{co}(M)$, dass $\operatorname{co}(M) \subset C$ gilt. Seien also $x, y \in C$ beliebig. Dann gibt es $m_k \in M$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $\sum_{k=n+1}^m \lambda_k = 1$ mit $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k$ und $y = \sum_{k=n+1}^m \lambda_k m_k$. Ist nun $\lambda \in [0, 1]$, so ist

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \sum_{k=1}^n \lambda \lambda_k m_k + \sum_{k=n+1}^m (1 - \lambda) \lambda_k m_k = \sum_{k=1}^m \mu_k m_k$$

mit $\mu_k := \lambda \lambda_k$ für $k \leq n$ und $\mu_k := (1 - \lambda) \lambda_k$ für $k > n$. Offenbar ist $\mu_k \geq 0$ für alle k, und es gilt

$$\sum_{k=1}^m \mu_k = \lambda \sum_{k=1}^n \lambda_k + (1 - \lambda) \sum_{k=n+1}^m \lambda_k = \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Also gilt definitionsgemäß $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$. Dies zeigt, dass C konvex ist, also wie bereits erläutert $\operatorname{co}(M) \subset C$. Insgesamt ist also $\operatorname{co}(M) = C$.

(d) Ist X ein normierter Raum und $M \subset X$ eine endliche Menge, so ist die konvexe Hülle $\operatorname{co}(M)$ kompakt. (2)

Lösung: Sei $M = \{m_1, \dots, m_N\}$ mit einem $N \in \mathbb{N}$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist jedes $x \in \operatorname{co}(M)$ dann von der Form $x = \sum_{k=1}^N \lambda_k m_k$ mit $\lambda_k \in [0, 1]$ und $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$. Sei (x^n) eine Folge in $\operatorname{co}(M)$ und seien λ_k^n zugehörige Konvexkoeffizienten. Dann ist $\big((\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in der kompakten Menge $[0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$. Wähle eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, die der

Einfachheit halber wieder mit $((\lambda_k^n))_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet sei. Es gilt also $\lambda_k^n \to \lambda_k$ für alle $k \in \{1,\ldots,N\}$. Daraus folgt $\lambda_k \in [0,1]$ und wegen Stetigkeit der Summation $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$. Daraus folgt $x^n = \sum_{k=1}^N \lambda_k^n m_k \to \sum_{k=1}^N \lambda_k m_k \in \mathrm{co}(M)$, wobei wieder der vorige Aufgabenteil verwendet wurde. Jede Folge in $\mathrm{co}(M)$ hat also eine in $\mathrm{co}(M)$ konvergente Teilfolge. Dies zeigt, dass $\mathrm{co}(M)$ kompakt ist.

(e) Sei H ein separabler reeller Hilbertraum, $C \subset H$ konvex, $C \neq \emptyset$ und $x \in H \setminus C$. Es gibt im Allgemeinen *kein* $p \in H$, $p \neq 0$ mit $(p|y) \leq (p|x)$ für alle $y \in C$. (2)
Tipp: Man kann C als einen dichten Unterraum von X wählen.

Lösung: Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und (e_n) eine Orthonormalbasis von H. Definiere $C := \mathrm{span}\{e_n\}$. Weil unendlichdimensionale Banachräume keine abzählbare Basis besitzen, ist $C \neq H$. Es gibt also ein $x \in H \setminus C$. Sei nun $p \in H$ ein Vektor mit der Eigenschaft, dass $(p|y) \leq (p|x)$ für alle $y \in C$ gilt. Insbesondere hat man also $\lambda\,(p|e_n) = (p|\lambda e_n) \leq (p|x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle n. Dies ist nur dann möglich, wenn $(p|e_n) = 0$ für alle n gilt. Wir haben also

$$p \in \big\{x \in H : (x|e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\big\}$$

gezeigt, was laut Aufgabenteil 35 (d) $p = 0$ impliziert. Es kann also keinen Vektor $p \neq 0$ mit dieser Eigenschaft geben.