Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 17 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

46. Seien X und Y normierte Räume und $J\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Zeige:

(a) Genau dann gilt $\|J\| \le 1$ und $\|J^{-1}\| \le 1$, wenn J isometrisch ist. (1)

Lösung: Sei J isometrisch. Dann ist $\|Jx\| = \|x\|$ und also $\|J\| \le 1$. Ebenso ist dann J^{-1} eine Isometrie, also $\|J^{-1}\| \le 1$.

Gelte nun umgekehrt $\|J\| \le 1$ und $\|J^{-1}\| \le 1$. Für $x \in X$ gilt dann $\|Jx\| \le \|x\|$ und $\|x\| = \|J^{-1}Jx\| \le \|Jx\|$, also $\|Jx\| = \|x\|$. Damit ist J isometrisch.

(b) Ist $X \ne \{0\}$, $\varphi \in Y'$ und $\psi = \varphi \circ J$, so ist $\psi \in X'$ und es gilt genauer sogar $\left\|J^{-1}\right\|^{-1} \|\varphi\| \le \|\psi\| \le \|J\|\,\|\varphi\|$. Ist J sogar isometrisch, so folgt $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (1)

Lösung: Nach der Ungleichung für Produkte von Operatoren gilt $\|\psi\| \le \|\varphi\|\,\|J\|$. Wegen $\varphi = \psi \circ J^{-1}$ folgt analog $\|\varphi\| \le \|\psi\|\,\left\|J^{-1}\right\|$, was die Behauptung zeigt; beachte, dass aus $X \ne \{0\}$ auch $J \ne 0$ und daher $\|J^{-1}\| > 0$ folgt. Die Zusatzbehauptung folgt nun aus dem ersten Aufgabenteil.

47. Sei $1 \le p \le \infty$. Zu $g \in L^{p'}(\Omega)$ definiere $\varphi_g(f) := \int_\Omega fg$. Laut Vorlesung ist $g \mapsto \varphi_g$ eine stetige lineare Abbildung von $L^{p'}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)'$ mit $\|\varphi_g\| \le \|g\|_{p'}$. Zeige:

(a) Sei $p \ne 1$ oder (Ω, Σ, μ) σ-endlich. Dann ist $\|\varphi_g\| = \|g\|_{p'}$. (6)

Lösung: Der Fall $g = 0$ ist trivial. Sei also im Folgenden $g \ne 0$ und daher $\|g\|_{p'} > 0$.

Sei zuerst $p = \infty$, also $g \in L^1(\Omega)$. Definiere $f := \frac{|g|}{g}\,\mathbb{1}_{\{g \ne 0\}}$. Dann ist $f \in L^\infty(\Omega)$ und $\|f\|_\infty \le 1$. Daraus folgt

$$\|\varphi_g\| \ge \varphi_g(f) = \int_{\{g\ne 0\}} |g| \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_1.$$

Sei nun $1 < p < \infty$ und $q := p' = \frac{p}{p-1}$, also $g \in L^q(\Omega)$. Definiere $f := \frac{|g|^q}{g}\,\mathbb{1}_{\{g\ne 0\}}$. Dann ist $|f|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$, also $f \in L^p(\Omega)$ und $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$. Daraus folgt

$$\|\varphi_g\|\,\|g\|_q^{q/p} \ge \varphi_g(f) = \int_{\{g\ne 0\}} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q^q.$$

Es ergibt sich also $\|\varphi_g\| \ge \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|_q$.

Sei schließlich $p = 1$ und (Ω, Σ, μ) σ-endlich. Wähle eine Folge (A_n) in Σ mit den Eigenschaften $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$. Sei $\alpha < \|g\|_\infty$ und $B := \{|g| \ge \alpha\}$. Definiere $B_n := B \cap A_n$. Dann ist $\mu(B_n) < \infty$ und daher $f_n := \frac{|g|}{g}\,\mathbb{1}_{B_n} \in L^1(\Omega)$ mit $\|f_n\|_1 = \mu(B_n)$. Daraus folgt

$$\|\varphi_g\|\,\mu(B_n) = \|\varphi_g\|\,\|f_n\|_1 \ge \varphi_g(f_n) = \int_{B_n} |g| \,\mathrm{d}\mu \ge \alpha\mu(B_n).$$

Nach Definition von $\|g\|_\infty$ ist $\mu(B) > 0$. Also ist $\mu(B_n) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da anderenfalls B eine Nullmenge wäre. Daher kann man aus obiger Ungleichung $\|\varphi_g\| \ge \alpha$ schlussfolgern. Weil dies für jedes $\alpha < \|g\|_\infty$ richtig ist, ergibt sich $\|\varphi_g\| \ge \|g\|_\infty$.

(b) Es gibt einen Maßraum (Ω, Σ, μ) und $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi_g\| \ne \|g\|_\infty$. (1)

Tipp: Betrachte beispielsweise $\Omega = \mathbb{R}$ mit dem Lebesguemaß $\mu = \lambda$ und der σ-Algebra $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.

Lösung: Sei (Ω, Σ, μ) wie im Tipp. Dann sind die messbaren Funktionen gerade die konstanten Funktionen. Sei nämlich f Σ-messbar und $y := f(0)$. Dann ist $f^{-1}(\{y\})$ eine nicht-leere Menge in Σ, also $f^{-1}(\{y\}) = \Omega$. Dies zeigt, dass $f(x) \equiv y$ gilt. Nun ist es nicht schwer zu sehen, dass $L^1(\Omega, \Sigma, \mu) = \{0\}$ gilt und die Einsfunktion $g := \mathbb{1}_\Omega$ in $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ liegt. Offenbar ist dann $\varphi_g(f) = 0$ für alle $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, also $\varphi_g = 0$. Damit ist $\|\varphi_g\| = 0 < 1 = \|g\|_\infty$.

48. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathscr{L}(H)$. Zeige, dass $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ genau dann ein Eigenvektor von T ist, wenn $|(Tx|x)| = \|Tx\|$ gilt! (3)
Tipp: Man kann den Eigenwert raten und dann nachrechnen, dass $\|Tx - \lambda x\|^2 = 0$ gilt.

Lösung: Sei zuerst x ein Eigenvektor von T, also $Tx = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$|(Tx|x)| = |(\lambda x|x)| = |\lambda| = \|\lambda x\| = \|Tx\|\,.$$

Es gelte nun umgekehrt $|(Tx|x)| = \|Tx\|$. Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\|Tx - \lambda x\|^2 = \|Tx\|^2 - 2\operatorname{Re}(Tx|\lambda x) + \|\lambda x\|^2 = |(Tx|x)|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}\,(Tx|x) + |\lambda|^2\,.$$

Setzt man speziell $\lambda := (Tx|x)$ ein, erhält man $\|Tx - \lambda x\|^2 = 0$, also $Tx = \lambda x$. Damit ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = (Tx|x)$.

Bemerkung: Man kann dies so auch zeigen, indem man bemerkt, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\,(x|y)\,| \le \|x\|\,\|y\|$ genau dann zur Gleichung wird, wenn die Vektoren x und y linear abhängig sind. Vergleiche dazu Aufgabe 30.

49. Sei $1 \le p < \infty$. Zu $y \in \ell^{p'}$ definiere $\varphi_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Zeige, dass die Zuordnung $y \mapsto \varphi_y$ ein isometrischer Isomorphismus von $\ell^{p'}$ nach $(\ell^p)'$ ist! (5)
Tipp: Für die Surjektivität kann man $y_n := \varphi(e_n)$ definieren und $\varphi = \varphi_y$ nachrechnen.

Lösung: Weil $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ ein σ-endlicher Maßraum ist, folgt aus der Vorlesung und Aufgabenteil 47 (a), dass die Zuordnung wohldefiniert und isometrisch ist. Es bleibt also nur noch die Surjektivität zu zeigen.

Sei dazu $\varphi \in (\ell^p)'$, $q := p'$ und $y_n := \varphi(e_n)$. Wir zeigen, dass $y := (y_n)$ in ℓ^q liegt. Für $q = \infty$ folgt dies aus $|y_n| \le \|\varphi\|\,\|e_n\| = \|\varphi\|$. Sei also für den Moment $q < \infty$, also $p = \frac{q}{q-1} > 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ und definiere $x_n := \frac{|y_n|^q}{y_n}$ für $y_n \neq 0$ und $n \le N$; in den anderen Fällen sei $x_n := 0$. Dann liegt $x := (x_n)$ in ℓ^p mit

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = \sum_{n=1}^N |y_n|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^N |y_n|^q.$$

Zudem folgt

$$\|\varphi\| \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right)^{1/p} = \|\varphi\|\,\|x\|_p \ge \varphi(x) = \sum_{n=1}^N x_n \varphi(e_n) = \sum_{n=1}^N |y_n|^q,$$

also nach Umstellen

$$\sum_{n=1}^N |y_n|^q \le \|\varphi\|^{\frac{1}{1-1/p}} = \|\varphi\|^q.$$

Weil N beliebig war, folgt hieraus $\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q < \infty$, also $y \in \ell^q$. Somit gilt für $1 \le p < \infty$, also für $1 < q \le \infty$ stets $y \in \ell^q$, und damit $\varphi_y \in (\ell^p)'$. Nach Definition von y stimmen φ und φ_y auf der Menge $\{e_n\}$ und wegen Linearität daher auch auf der dichten Teilmenge $c_{00} = \operatorname{span}\{e_n\}$ von ℓ^p überein. Weil beide Funktionale stetig sind, zeigt dies $\varphi = \varphi_y$. Damit ist die Surjektivität von $y \mapsto \varphi_y$ nachgewiesen.

Bonusaufgabe

(a) Für $q \in (1,\infty]$ gilt $\bigcup_{p<q} \ell^p \neq \ell^q$ und für $p \in [1,\infty)$ gilt $\ell^p \neq \bigcap_{q>p} \ell^q$. Insbesondere ist $\ell^p \neq \ell^q$ für $p \neq q$. (3)

Lösung: Wir benutzen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ äquivalent zu $\alpha > 1$ ist, und dass außerdem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2} < \infty$ gilt. Dies sollte aus dem Grundstudium bekannt sein. Der Beweis der zweiten Behauptung wird der Vollständigkeit halber aber nochmals skizziert. Betrachte dazu die Funktion $f(x) = \frac{-1}{\log(x)}$ für $x > 1$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{x \log(x)^2} \text{ und } f''(x) = -\frac{2 + \log(x)}{x^2 \log(x)^3} < 0.$$

Also ist f' monoton fallend. Damit kann man das Integralkriterium für Reihenkonvergenz anwenden und erhält, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} f'(n)$ konvergiert, da das Integral $\int_2^\infty f'(x)\,\mathrm{d}x = -f(2) + \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\log(2)}$ existiert.

Sei $q \in (1,\infty]$. Für $q = \infty$ kann man die Folge $x \in \ell^\infty$ mit $x_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen und hat ein Element aus $\ell^\infty \setminus \bigcup_{p<\infty} \ell^p$ gefunden. Ist $q < \infty$, so setze $x := (x_n)$ mit $x_1 := 0$ und $x_n := \frac{1}{n^{1/q} \log(n)^{2/q}}$ für $n \geq 2$. Dann ist nach obiger Überlegung $x \in \ell^q$. Sei nun $p < q$. Setze $\alpha := \frac{p}{q} < 1$ und wähle $\beta > 0$ mit $\alpha + \beta < 1$. Dann gilt für hinreichend große Werte von n, also $n \geq n_0$, die Abschätzung $\log(n)^{2p/q} \leq n^\beta$. Damit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{p/q} n^\beta} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} = \infty.$$

Also ist $x \notin \ell^p$ und wir haben ein Element in $\ell^q \setminus \bigcup_{p<q} \ell^p$ gefunden.

Sei nun $p \in [1,\infty)$ beliebig. Betrachte die durch $x_n := \frac{1}{n^{1/p}}$ definierte Folge. Dann ist $x \notin \ell^p$, aber wegen $\frac{q}{p} > 1$ gilt $x \in \ell^q$ für jedes $q > p$. Also haben wir ein Element in $\bigcap_{q>p} \ell^q \setminus \ell^p$ gefunden.

(b) Für $q \in (1,\infty]$ gilt $\bigcap_{p<q} L^p(0,1) \neq L^q(0,1)$ und für $p \in [1,\infty)$ gilt $L^p(0,1) \neq \bigcup_{q>p} L^q(0,1)$. Insbesondere ist $L^p(0,1) \neq L^q(0,1)$ für $p \neq q$. (3)

Lösung: Wie im ersten Aufgabenteil benutzen wir eine Klasse von Funktionen, bei denen wir wissen, für welche Parameter die zugehörigen Integrale existieren. Es ist bekannt, dass für $\varepsilon > 0$ das Integral $\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha < 1$ ist. Es ist außerdem einfach zu sehen, dass $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x \log(x/2)^2}$ konvergiert, wenn man die Stammfunktion $\frac{-1}{\log(x/2)}$ des Integranden kennt.

Sei $q \in (1,\infty]$. Für $q = \infty$ wähle $f(x) := \log(x)$. Dann gibt es zu $\alpha > 0$ ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| = |\log(1/x)| \leq (1/x)^\alpha$ für $x \in (0,\varepsilon)$. Also ist $\int_0^\varepsilon |f|^p \leq \int_0^\varepsilon \frac{1}{x^{\alpha p}} < \infty$ für $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Weil f auf $[\varepsilon, 1]$ sogar beschränkt ist, folgt daraus $f \in L^p(0,1)$ für jedes $p \in [1,\infty)$. Also ist $f \in \bigcap_{p<\infty} L^p(0,1) \setminus L^\infty(0,1)$. Ist aber $q < \infty$, so wähle $f(x) := \frac{1}{x^{1/q}}$. Dann ist f in $L^p(0,1)$ für jedes $p < q$, aber nicht in $L^q(0,1)$, also ein Element in $\bigcap_{p<q} L^p(0,1) \setminus L^q(0,1)$.

Sei nun $p \in [1,\infty)$. Definiere $f(x) := \frac{1}{x^{1/p} |\log(x/2)|^{2/p}}$. Dann ist $f \in L^p(0,1)$. Für $q > p$ ist $\alpha := \frac{q}{p} > 1$. Wähle $\beta > 0$ so, dass $\alpha - \beta > 1$ ist. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass für $x < \varepsilon$ die Abschätzung $|\log(x/2)|^{2q/p} = |\log(2/x)|^{2\alpha} \leq \frac{1}{x^\beta}$ gilt. Damit folgt

$$\int_0^1 |f|^q \,\mathrm{d}x \geq \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^{q/p} \frac{1}{x^\beta}} = \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-\beta}} = \infty.$$

Also ist $f \in L^p(0,1) \setminus \bigcup_{q>p} L^q(0,1)$.