Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

50. Sei A eine Menge und $\mathscr{P}(A)$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von A nach $\mathscr{P}(A)$ gibt! (1)
Tipp: Imitiere den Beweis der Russel'schen Antinomie.

51. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\mathcal{F} \subset \Sigma$ eine σ-Algebra. Wir schreiben $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ für die bedingte Erwartung von $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ unter $\mathcal{F}$. Zeige oder widerlege:

(a) Ist $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $Y \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = Y$ genau dann, wenn Y in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ liegt und $\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_A Y \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt. (2)

(b) Für $A \in \mathcal{F}$ und $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt $\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \,\mathrm{d}\mu$. (1)

(c) $\mathbb{E}\big[|X|\big|\mathcal{F}\big] = \big|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big|$ (1)

(d) Sei $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $0 < \mu(A_i) < \infty$. Sei $\mathcal{F} := \sigma(A_i : i \in \mathbb{N})$ die kleinste σ-Algebra, die jedes A_i enthält. Dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} X \,\mathrm{d}\mu \; \mathbb{1}_{A_i}$ für $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. (2)

52. Zeige, dass es Teilmengen $(A_i)_{i \in I}$ von $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt: jedes A_i abzählbar; sind $i, j \in I$, so gilt $A_i \subset A_j$ oder $A_j \subset A_i$; $\bigcup_{i \in I} A_i$ ist überabzählbar. (2)
Tipp: Kann man das Lemma von Zorn auf die bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge der abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ anwenden?

53. Ist H ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in H, so heißt (x_n) schwach gegen x konvergent, falls $(x_n|y) \to (x|y)$ für alle $y \in H$ gilt, und man schreibt dafür $x_n \rightharpoonup x$. Zeige:

(a) Eine Folge (x_n) in ℓ^2 ist genau dann schwach konvergent, wenn sie beschränkt ist und komponentenweise konvergiert. (2)
Tipp: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und Satz von Riesz-Fréchet

(b) Ist (x_n) eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum, so besitzt (x_n) eine schwach konvergente Teilfolge. (2)
Tipp: Betrachte zuerst ℓ^2, dann separable und schließlich beliebige Hilberträume.

(c) Zu $u \in L^2(\mathbb{R})$ definiere $D_h u(x) := \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$. Gibt es $h_n > 0$ mit $h_n \to 0$ und $(D_{h_n} u)|_{(0,1)} \rightharpoonup v \in L^2(0,1)$, so ist $u|_{(0,1)} \in H^1(0,1)$ und $u' = v$. (2)

(d) Ist H ein reeller Hilbertraum, $C \subset H$ abgeschlossen und konvex und (x_n) eine Folge in C mit $x_n \rightharpoonup x$ in H, so ist $x \in C$. (1)
Tipp: Man kann die Trennungssätze verwenden.

(e) Die Menge $\{u \in L^\infty(0,1) : \|u\|_\infty \leq L\}$ ist für jedes $L \geq 0$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $L^2(0,1)$. (1)

(f) Ist $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist $u \in H^1(0,1)$ und $u' \in L^\infty(0,1)$. (2)

(g) $u\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) := |2x-1|$, liegt in $H^1(0,1)$. Bestimme die Ableitung! (1)