Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 20.10.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 30

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 1

1. Sei X ein normierter Raum und $f\colon \Omega \to X$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, stetig. Zeige:

(a) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt. (1)

(b) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist f auf K gleichmäßig stetig. (1)

(c) Ist $A \subset \Omega$ zusammenhängend, so ist auch $f(A)$ zusammenhängend. (1)

(d) Die Funktion f ist *separabel-wertig*, d.h. es gibt einen separablen Unterraum U von X mit $f(\Omega) \subset U$. (1)

(e) Ist (g_n) eine Folge stetiger Funktionen $g_n\colon \Omega \to X$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g\colon \Omega \to X$ konvergiert, so ist auch g stetig. (1)

2. *Riemann-Integral vektorwertiger Funktionen:* Seien $a < b$ reelle Zahlen und X ein normierter Raum. Zu einer Funktion $f\colon [a,b] \to X$ und zu Zerlegungs- und Zwischenpunkten π, $\pi = ((z_i)_{i=0}^k, (\xi_i)_{i=1}^k)$, also $a = z_0 \le \xi_1 \le z_1 \le \dots \le z_{k-1} \le \xi_k \le z_k = b$ definieren wir die *Riemann'sche Zwischensumme*

$$S(f,\pi) \coloneqq \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}).$$

Wie üblich bezeichne $|\pi| \coloneqq \max_{i=1,\dots,k}(z_i - z_{i-1})$ die *Feinheit* von π. Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon [a,b] \to X$ *Riemann-integrierbar* ist und schreiben dafür $f \in R([a,b];X)$, falls für jede Folge (π_n) von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\pi_n| \to 0$ die Folge $S(f,\pi_n)$ in X konvergiert. Zeige:

(a) Ist $f \in R([a,b];X)$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor g in X mit der Eigenschaft, dass für jede Folge (π_n) von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\pi_n| \to 0$ gilt, dass $S(f,\pi)$ gegen g konvergiert. Wir schreiben $\int_a^b f \coloneqq g$. (2)

(b) Ist $f \in R([a,b];X)$, Y ein weiterer normierter Raum und $T\colon X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator, so ist $T \circ f \in R([a,b];Y)$ und es gilt $\int_a^b (T \circ f) = T \int_a^b f$. (1)

(c) Ist $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und ist $f \in R([0,1];X)$ mit $f([0,1]) \subset K$, so ist $\int_0^1 f \in K$. (1)

(d) Sei $X \coloneqq L^\infty(0,1)$, $[a,b] = [0,1]$, und $f(t) \coloneqq \mathbb{1}_{[0,t]}$. Die Funktion f ist Riemann-integrierbar, aber nicht separabel-wertig. Was ist $\int_a^b f$? Wo liegen die Unstetigkeitsstellen von f? (4)

(e) Ist $f\colon [a,b] \to X$ stetig und X ein Banachraum, so ist $f \in R([a,b];X)$. Bleibt die Aussage richtig, wenn man nicht fordert, dass X vollständig ist? (3)

(f) Es gibt einen Banachraum X, $f \in R([0,1];X)$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \circ f \notin R([a,b])$. Kann man $X = \mathbb{R}$ wählen? (3)

(g) Sei X ein Banachraum und sei (f_n) eine Folge in $R([a,b];X)$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist $f \in R([a,b];X)$, und $\int_a^b f_n$ konvergiert gegen $\int_a^b f$. (2)

3. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f\colon (a,b) \to X$ heißt *differenzierbar in* $t_0 \in (a,b)$, falls der Grenzwert $f'(t_0) \coloneqq \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existiert, und *differenzierbar auf* (a,b), falls f in jedem Punkt $t_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. Im Folgenden sei $f\colon (a,b) \to X$ differenzierbar auf (a,b). Zeige:

(a) Die Funktion f ist stetig auf (a,b). (1)

(b) Ist Y ein weiterer Banachraum und T ein beschränkter linearer Operator von X nach Y, so ist $T \circ f$ differenzierbar und es gilt $(T \circ f)' = T \circ f'$. (1)

(c) Lässt sich f stetig auf $[a,b]$ fortsetzen und gilt $f' \in R([a,b];X)$, so ist $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. (2)

(d) Ist f stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und gilt $\|f'(t)\| \le M$ für alle $t \in (a,b)$, so ist $\|f(b) - f(a)\| \le M(b-a)$. Ist stets $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ für ein $\xi \in (a,b)$? (2)

(e) Ist $f'(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$, so ist f konstant. (1)

(f) Ist $H \coloneqq X$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot \mid \cdot)_H$ und $g\colon [a,b] \to H$ eine weitere differenzierbare Funktion, so ist auch $(f \mid g)_H$, also die Funktion $t \mapsto (f(t) \mid g(t))_H$, differenzierbar. Wie lautet die Ableitung? (2)