Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 20.10.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 30

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 1

1. Sei X ein normierter Raum und $f\colon \Omega \to X$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, stetig. Zeige:

(a) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt. (1)

Lösung: wie in Analysis 2

(b) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist f auf K gleichmäßig stetig. (1)

Lösung: wie in Analysis 1

(c) Ist $A \subset \Omega$ zusammenhängend, so ist auch $f(A)$ zusammenhängend. (1)

Lösung: wie in Analysis 2

(d) Die Funktion f ist *separabel-wertig*, d.h. es gibt einen separablen Unterraum U von X mit $f(\Omega) \subset U$. (1)

Lösung: Sei Q eine abzählbare, dichte Teilmenge von Ω. Dann ist der Abschluss von $\operatorname{span} f(Q)$ ein solcher Unterraum.

(e) Ist (g_n) eine Folge stetiger Funktionen $g_n\colon \Omega \to X$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g\colon \Omega \to X$ konvergiert, so ist auch g stetig. (1)

Lösung: wie in Analysis 1

2. *Riemann-Integral vektorwertiger Funktionen:* Seien $a < b$ reelle Zahlen und X ein normierter Raum. Zu einer Funktion $f\colon [a,b] \to X$ und zu Zerlegungs- und Zwischenpunkten π, $\pi = ((z_i)_{i=0}^k, (\xi_i)_{i=1}^k)$, also $a = z_0 \le \xi_1 \le z_1 \le \dots \le z_{k-1} \le \xi_k \le z_k = b$ definieren wir die *Riemann'sche Zwischensumme*

$$S(f,\pi) \coloneqq \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}).$$

Wie üblich bezeichne $|\pi| \coloneqq \max_{i=1,\dots,k}(z_i - z_{i-1})$ die *Feinheit* von π. Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon [a,b] \to X$ *Riemann-integrierbar* ist und schreiben dafür $f \in R([a,b];X)$, falls für jede Folge (π_n) von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\pi_n| \to 0$ die Folge $S(f,\pi_n)$ in X konvergiert. Zeige:

(a) Ist $f \in R([a,b];X)$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor g in X mit der Eigenschaft, dass für jede Folge (π_n) von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\pi_n| \to 0$ gilt, dass $S(f,\pi)$ gegen g konvergiert. Wir schreiben $\int_a^b f \coloneqq g$. (2)

Lösung: Die Eindeutigkeit ist klar. Für die Existenz fixiere eine beliebige Folge (π_n) von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\pi_n| \to 0$, beispielsweise äquidistante Unterteilungen von $[a,b]$ in n Teile. Setze $g \coloneqq \lim_{n\to\infty} S(f,\pi_n)$. Sei nun $(\hat\pi_n)$ eine weitere Folge von Zerlegungs- und Zwischenpunkten mit $|\hat\pi_n| \to 0$. Setze

$$(\Pi_n) \coloneqq (\pi_1, \hat\pi_1, \pi_2, \hat\pi_2, \dots).$$

Dann gilt auch $|\Pi_n| \to 0$ und daher konvergiert $S(f,\Pi_n)$, und natürlich gegen g. Also konvergiert $S(f,\hat\pi_n)$ gegen g.

(b) Ist $f \in R([a,b];X)$, Y ein weiterer normierter Raum und $T\colon X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator, so ist $T \circ f \in R([a,b];Y)$ und es gilt $\int_a^b (T \circ f) = T \int_a^b f$. (1)

Lösung: Ist $\pi_n = ((z_i^{(n)}), (\xi_i^{(n)}))$, so gilt

$$S(T \circ f, \pi_n) = \sum_{i=1}^{k} T(f(\xi_i^{(n)}))(z_i^{(n)} - z_{i-1}^{(n)}) = T\Big(\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i^{(n)})(z_i^{(n)} - z_{i-1}^{(n)})\Big) \to T \int_a^b f$$

falls $|\pi_n| \to 0$.

(c) Ist $K \subset X$ abgeschlossen und konvex und ist $f \in R([0,1];X)$ mit $f([0,1]) \subset K$, so ist $\int_0^1 f \in K$. (1)

Lösung: Weil für alle Zerlegungs- und Zwischenpunkte π die Riemann-Summe $S(f,\pi)$ eine Konvexkombination von Werten von f ist, liegt $S(f,\pi)$ in K. Damit liegt auch der Grenzwert $\int_a^b f$ solcher Elemente in K.

(d) Sei $X \coloneqq L^\infty(0,1)$, $[a,b] = [0,1]$, und $f(t) \coloneqq \mathbb{1}_{[0,t]}$. Die Funktion f ist Riemann-integrierbar, aber nicht separabel-wertig. Was ist $\int_a^b f$? Wo liegen die Unstetigkeitsstellen von f? (4)

Lösung: Bezeichne π Zerlegungs- und Zwischenpunkte. Dann gilt

$$S(f,\pi)(x) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{[0,\xi_i]}(x)(z_i - z_{i-1}) = \begin{cases} 1, & x \le \xi_1, \\ 1 - z_j, & \xi_j < x \le \xi_{j+1} \ (j = 1, \dots, k-1), \\ 0, & \xi_k < x. \end{cases}$$

Also rät man als Integralwert $g(x) \coloneqq 1 - x$ und rechnet

$$\|S(f,\pi) - g\|_\infty \le \max\Big\{ \max_{[0,\xi_1]} |x|, \max_{(\xi_j,\xi_{j+1}]} |x - z_j|, \max_{(\xi_k,1]} |1 - x| \Big\} \le |\pi|$$

nach. Dies zeigt die Integrierbarkeit von f und $\int_0^1 f = g$.
Wegen $\|f(t) - f(s)\|_\infty = 1$ für $t \neq s$ ist f nach einem Standardargument nicht separabel-wertig. Zudem zeigt dies, dass f in jedem Punkt unstetig ist. Die aus dem Skalaren bekannte Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen durch die Menge ihrer Stetigkeitsstellen überträgt sich also nicht auf vektorwertige Funktionen.

(e) Ist $f\colon [a,b] \to X$ stetig und X ein Banachraum, so ist $f \in R([a,b];X)$. Bleibt die Aussage richtig, wenn man nicht fordert, dass X vollständig ist? (3)

Lösung: Sei (π_n) eine Folge von Zerlegungs- und Zwischenpunkten. Es genügt zu zeigen, dass $S(f,\pi_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ fest gewählt und $\delta > 0$ wie in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit von f. Sei n_0 so groß, dass $2|\pi_n| < \delta$ für $n \ge n_0$, seien $n, m \ge n_0$, sei $(\tilde z_i)$ die gemeinsame Verfeinerung von $(z_i^{(n)})$ und $(z_i^{(m)})$, und seien $(\tilde\xi_i^{(n)})$ und $(\tilde\xi_i^{(m)})$ die zugehörigen Auswertungspunkte. Dann ist geometrisch klar, dass $|\tilde\xi_i^{(n)} - \tilde\xi_i^{(m)}| \le 2\max\{|\pi_n|, |\pi_m|\} < \delta$ ist. Also hat man

$$\|S(f,\pi_n) - S(f,\pi_m)\| \le \sum\nolimits_i \big\|f(\tilde\xi_i^{(n)}) - f(\tilde\xi_i^{(m)})\big\|(\tilde z_i - \tilde z_{i-1}) \le \varepsilon(b-a),$$

was zeigt, dass $S(f,\pi_n)$ konvergiert.
Wähle im vorigen Aufgabenteil statt $X = L^\infty(0,1)$ den Raum X als die Menge aller Treppenfunktionen mit der Norm von $L^2(0,1)$. Dann ist f stetig, es gilt $f(t) \in X$ für jedes t, aber f ist nicht integrierbar, da sonst wegen Eindeutigkeit und Vergleichbarkeit der Normen $\int_0^1 f = g$ mit $g(x) = 1 - x$ gelten müsste, aber g nicht in X liegt. Also kann man auf die Vollständigkeit nicht verzichten.

(f) Es gibt einen Banachraum X, $f \in R([0,1];X)$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \circ f \notin R([a,b])$. Kann man $X = \mathbb{R}$ wählen? (3)

Lösung: Wähle $X = L^\infty(0,1)$, $f(t) := \mathbb{1}_{[0,t]}$, $Q := \{\mathbb{1}_{[0,q]} : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ und die Lipschitz-stetige Funktion $\varphi(g) := \operatorname{dist}(g, Q)$. Dann sind die Voraussetzungen erfüllt und $\varphi \circ f$ ist die Dirichlet'sche Sprungfunktion, also nicht Riemann-integrierbar.

Im Fall $X = \mathbb{R}$ ist aus der Analysis bekannt, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn f beschränkt und fast überall stetig ist. Da für eine stetige Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $\varphi \circ f$ zumindest dort stetig ist, wo f es ist, und φ beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, ist also auch $\varphi \circ f$ Riemann-integrierbar. Man kann folglich in $X = \mathbb{R}$ oder allgemeiner in einem endlich-dimensionalen Raum X kein solches Beispiel konstruieren.

(g) Sei X ein Banachraum und sei (f_n) eine Folge in $R([a,b];X)$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist $f \in R([a,b];X)$, und $\int_a^b f_n$ konvergiert gegen $\int_a^b f$. (2)

Lösung: Für beliebiges $f \in R([a,b];X)$ gilt

$$\|S(f,\pi)\| \le (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\| =: (b-a)\|f\|_\infty.$$

Durch Grenzübergang folgt

$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \le (b-a)\|f\|_\infty.$$

Ebenso zeigt man die Linearität des Integrals durch Approximation. In der Situation der Aufgabe zeigt dies

$$\Big| \int_a^b f_n - \int_a^b f_m \Big| \le (b-a)\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

für $n, m \ge n_0(\varepsilon)$. Also existiert $g := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$, und die Behauptung ist $\int_a^b f = g$. Dies sieht man aus

$$\|S(f,\pi) - g\| \le \Big\| S(f,\pi) - S(f_n,\pi) \Big\| + \Big\| S(f_n,\pi) - \int_a^b f_n \Big\| + \Big\| \int_a^b f_n - g \Big\| \le \varepsilon$$

für n groß und $|\pi|$ klein; beachte hierfür, dass die Abschätzung des ersten Summanden gleichmäßig in π gilt.

3. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f\colon (a,b) \to X$ heißt *differenzierbar in* $t_0 \in (a,b)$, falls der Grenzwert $f'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existiert, und *differenzierbar auf* (a,b), falls f in jedem Punkt $t_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. Im Folgenden sei $f\colon (a,b) \to X$ differenzierbar auf (a,b). Zeige:

(a) Die Funktion f ist stetig auf (a,b). (1)

Lösung: Dies folgt aus $f(x) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + o(|t-t_0|)$.

(b) Ist Y ein weiterer Banachraum und T ein beschränkter linearer Operator von X nach Y, so ist $T \circ f$ differenzierbar und es gilt $(T \circ f)' = T \circ f'$. (1)

Lösung: Folgt unmittelbar aus der Definition.

(c) Lässt sich f stetig auf $[a,b]$ fortsetzen und gilt $f' \in R([a,b];X)$, so ist $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. (2)

Lösung: Sei $\varphi \in X'$. Dann ist $t \mapsto \langle \varphi, f(t) \rangle$ differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto \langle \varphi, f'(t) \rangle$. Nach dem (skalaren) Hauptsatz und den schon bewiesenen Aussagen über das Riemann-Integral gilt dann

$$\Big\langle \varphi, \int_a^b f'(t) \Big\rangle = \int_a^b \langle \varphi, f'(t) \rangle = \langle \varphi, f(b) \rangle - \langle \varphi, f(a) \rangle = \langle \varphi, f(b) - f(a) \rangle.$$

Unter Verwendung des Satzes von Hahn-Banach folgt daraus die Behauptung.

(d) Ist f stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und gilt $\|f'(t)\| \leq M$ für alle $t \in (a, b)$, so ist $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$. Ist stets $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ für ein $\xi \in (a, b)$? (2)

Lösung: Die Mittelwertungleichung folgt aus

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'$$

unter der Trivialabschätzung für das Integral. Der Mittelwertsatz ist hingegen im Allgemeinen falsch, beispielsweise für $X = \mathbb{R}^2$, $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f(\vartheta) = (\sin \vartheta, \cos \vartheta)$.

(e) Ist $f'(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$, so ist f konstant. (1)

Lösung: Dies folgt beispielsweise aus dem vorigen Aufgabenteil, kann aber auch unter Verwendung des zweiten Aufgabenteils mit dem Satz von Hahn-Banach bewiesen werden.

(f) Ist $H := X$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot \mid \cdot)_H$ und $g\colon [a, b] \to H$ eine weitere differenzierbare Funktion, so ist auch $(f \mid g)_H$, also die Funktion $t \mapsto (f(t) \mid g(t))_H$, differenzierbar. Wie lautet die Ableitung? (2)

Lösung: Man prüft leicht nach, dass eine Funktion f genau dann in t differenzierbar ist, wenn es ein $f'(t_0) \in X$ mit $f(t+h) = f(t) + f'(t)h + o_f(h)$ gibt, wobei $\frac{o_f(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}(f(t+h) \mid g(t+h)) = (f(t) \mid g(t)) &+ h \left(f'(t) \mid g(t)\right) + h \left(f(t) \mid g'(t)\right) \\ &+ h^2 \left(f'(t) \mid g'(t)\right) \\ &+ \left(f(t) + f'(t)h \mid o_g(h)\right) + \left(o_f(h) \mid g(t) + g'(t)h\right),\end{aligned}$$

und man prüft damit leicht nach, dass die Ableitung $(f'(t) \mid g(t)) + (f(t) \mid g'(t))$ ist.