Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 3

9. Sei $X \neq \{0\}$ ein reflexiver Banachraum. Zeige:

(a) Ist $\varphi \in X'$, so gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|\varphi\| = \varphi(x)$.

Lösung: Bekanntermaßen ist

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\varphi(x) : \|x\| \leq 1\}.$$

Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}(0,1)$ ist beschränkt, abgeschlossen und konvex, $-\varphi$ konvex und stetig. Laut Vorlesung nimmt φ also ein Maximum auf $\overline{B}(0,1)$ in einem Punkt x an. Man macht sich leicht klar, dass entweder $\varphi = 0$ oder $\|x\| = 1$ gelten muss, und der erste Fall ist trivial.

(b) Ist $C \subset X$ abgeschlossen und konvex und $x \in X$, so gibt es ein *Proximum* von x in C, also ein $x_0 \in C$ mit $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - x_0\|$.

Lösung: Das (nicht-lineare) Funktional $y \mapsto \|x - y\|$ ist konvex, stetig und koerziv, nimmt laut Vorlesung also auf C ein Minimum in einem Punkt x_0 an.

(c) Ist die Norm von X strikt konvex, d.h. $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ für $x \neq y$ mit $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ und $0 < \lambda < 1$, so ist das Proximum eindeutig bestimmt, $P_C x := x_0$.

Lösung: Seien $x_1 \neq x_2$ Proxima von x in C und ohne Einschränkung

$$d := \|x - x_1\| = \|x - x_2\| > 0.$$

Dann ist $x_0 := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in C$ und

$$\|x - x_0\| = d \Big\| \frac{1}{2} \frac{(x - x_1)}{d} + \frac{1}{2} \frac{(x - x_2)}{d} \Big\| < d,$$

ein Widerspruch.

(d) Ist die Norm von X strikt konvex und U ein abgeschlossener Unterraum von X, so ist P_U im Allgemeinen trotzdem nicht linear.
Hinweis: Man darf ohne Beweis verwenden, dass die Norm von $L^p(\Omega)$, insbesondere also auch die Norm von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, für $1 < p < \infty$ strikt konvex ist.

Lösung: Betrachte $\|\cdot\|_3$ auf $\mathbb{R}^3$ und $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y = z\}$. Wir projezieren den ersten Einheitsvektor $(1,0,0)$. Dazu ist die Funktion

$$f(x,y,z) := \|(x,y,z) - (1,0,0)\|_3^3 = |x-1|^3 + |y|^3 + |z|^3$$

unter der Nebenbedingung $x = y = z$ zu minimieren.
Um die Beträge richtig zu behandeln, macht man entweder eine Fallunterscheidung oder überlegt sich (beispielsweise anhand einer Skizze), dass bei einem Minimum von f die Ungleichungen $0 \leq x = y = z \leq 1$ gelten. Man braucht also nur

$$t \mapsto (1-t)^3 + t^3 + t^3 = t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

auf $[0,1]$ zu minimieren, was mit Mitteln der Analysis 1 möglich ist. Man erhält daraus

$$P_U(1,0,0) = (\sqrt{2} - 1)(1,1,1).$$

Aus Symmetriegründen wird jeder Einheitsvektor auf denselben Wert projeziert. Es ergibt sich also

$$P_U(1,0,0) + P_U(0,1,0) + P_U(0,0,1) = 3(\sqrt{2}-1)(1,1,1) \neq (1,1,1) = P_U(1,1,1),$$

was zeigt, dass P_U nicht linear ist.

Bemerkung: Um zu sehen, dass die Norm von $L^p(\Omega)$ strikt konvex ist, muss man sich lediglich überlegen, wann in der Minkowski-Ungleichung sogar Gleichheit gilt. Dazu muss man wissen, wann in der Hölder-Ungleichung Gleichheit gilt. Beides kann man aber direkt aus dem Beweis ablesen.

10. Sei c_0 der Banachraum der Nullfolgen versehen mit der Maximumsnorm. Dann ist die Abbildung $j\colon \ell^1 \to (c_0)', \langle j(x), y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ein isometrischer Isomorphismus. In diesem Sinne schreibt man oft $(c_0)' = \ell^1$. Zeige:

(a) Ist $x \in \ell^1$, so nimmt x als Funktional genau dann ein Maximum auf $\{y \in c_0 : \|y\|_\infty \leq 1\}$ an, wenn x abbricht, es also ein n_0 mit $x_n = 0$ für $n \geq n_0$ gibt.

Lösung: Das Supremum des Funktionals x auf dieser Menge ist der Einleitung $\|x\|_1$. Äquivalent kann man also fragen, ob es ein $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty \leq 1$ gibt, für das

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1 = \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

gilt. Bricht x ab, so wähle $y_n := \operatorname{sgn} x_n$ für $n \leq n_0$ und $y_n := 0$ für $n > n_0$. Bricht x hingegen nicht ab und ist $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty \leq 1$, so gibt es ein N mit $|y_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq N$ und folglich ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n| + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1 - \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < \|x\|_1.$$

(b) Der Raum c_0 ist nicht reflexiv.

Lösung: Da es in ℓ^1 nicht abbrechende Folgen gibt, beispielsweise (e^{-n}), nimmt nicht jedes Funktional von c_0 auf der abgeschlossenen Einheitskugel sein Maximum an. Nach der vorigen Aufgabe kann c_0 somit nicht reflexiv sein.

11. *Brouwer'scher Fixpunktsatz, allgemeine Fassung:* Sei $C \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen, beschränkt und konvex, und sei $f\colon C \to C$ stetig. Zeige, dass es ein $x \in C$ mit $f(x) = x$ gibt! Gib jeweils ein Beispiel, dass man die Forderungen „abgeschlossen“, „beschränkt“, „konvex“ und „stetig“ nicht ersatzlos streichen kann.
Hinweis: Der Brouwer'sche Fixpunktsatz für Kugeln darf verwendet werden.

Lösung: Der Raum $\mathbb{R}^N$ versehen mit der euklidischen Norm ist ein Hilbertraum. Es gibt also eine stetige (orthogonale) Projektion P_C auf C. Sei $\overline{B}$ eine abgeschlossene Kugel, die C enthält. Dann ist $f \circ P_C\colon \overline{B} \to \overline{B}$ stetig und besitzt nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz für Kugeln einen Fixpunkt $x_0 \in \overline{B}$. Da x_0 dann im Bild von f liegt, ist sogar $x_0 \in C$ und daher $P_C x_0 = x_0$. Wir haben also $f(x_0) = f(P_C x_0) = x_0$ gezeigt.

Folgende Gegenbeispiele zeigen, dass keine der Voraussetzungen überflüssig ist:

- $C = (0,1)$, $f(x) := \frac{1}{2}x$;
- $C = \mathbb{R}$, $f(x) := x + 1$;
- $C = \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$, $f(x) := -x$;
- $C = [0,1]$, $f(x) := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$.

12. Wie in der Vorlesung heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *monoton*, falls $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ gilt. Die Menge heißt *maximal monoton*, wenn es keine monotone echte Obermenge gibt. Zeige:

(a) Eine monotone Menge $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist genau dann maximal monoton, wenn aus $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1) \in A$ folgt, dass (x_2, y_2) in A liegt.

Lösung: „$\Rightarrow$" Gibt es $(x_2, y_2) \notin A$ mit $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1) \in A$, so ist $B := A \cup \{(x_2, y_2)\}$ eine monotone echte Obermenge von A.

„$\Leftarrow$" Gibt es eine monotone echte Obermenge B von A mit $(x_2, y_2) \in B \setminus A$, so ist insbesondere $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1) \in A \subset B$. Somit ist dann die zweite Bedingung nicht erfüllt.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann monoton wachsend, wenn ihr Graph $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ eine monotone Menge ist.

Lösung: Man überlegt sich leicht, dass f genau dann monoton ist, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0$ gilt.

(c) Ist $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ monoton, so gibt es eine maximal monotone Obermenge von A.

Lösung: Betrachte das System aller monotonen Obermengen von A mit der Mengeninklusion als Ordnung. Da A selbst monoton ist, ist dieses Mengensystem nicht leer. Zu jeder total geordneten Kette von monotonen Obermengen von A ist die Vereinigung wieder eine monotone Obermenge von A und somit eine obere Schranke, da die Bedingung für die Monotonie nur von endlich vielen Elementen abhängt. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element, also eine maximal monotone Obermenge von A.

(d) Zu einer monoton wachsenden Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit einer Menge $I \subset \mathbb{R}$ gibt es im Allgemeinen keine Fortsetzung, deren Graph maximal monoton ist.

Lösung: Sei $f := \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ mit $I := \mathbb{R}$. Dann ist die einzige Fortsetzung von f die Funktion selbst. Deren Graph ist allerdings nicht maximal monoton, da $G(f) \cup \{(0, 1)\}$ eine monotone echte Obermenge von $G(f)$ ist.

13. Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Zeige:

(a) Es gibt genau ein $T' \in \mathscr{L}(Y', X')$ mit $\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle$ für $x \in X$ und $y \in Y'$.

Lösung: Der über diese Gleichung definierte Operator ist offenbar linear und dadurch bereits eindeutig bestimmt. Die Beschränktheit fällt im nächsten Aufgabenteil mit ab.

(b) Es gilt $\|T\| = \|T'\|$.

Lösung: Einerseits ist

$$|\left\langle x, T'y' \right\rangle| = |\left\langle Tx, y' \right\rangle| \leq \|Tx\| \, \|y'\| \leq \|T\| \, \|y'\| \, \|x\|,$$

also $\|T'y'\| \leq \|T\| \, \|y'\|$, also $\|T'\| \leq \|T\|$ und insbesondere T' beschränkt, andererseits ist

$$|\left\langle Tx, y' \right\rangle| \leq |\left\langle x, T'y' \right\rangle| \leq \|x\| \, \|T'y'\| \leq \|T'\| \, \|x\| \, \|y'\|,$$

nach dem Satz von Hahn-Banach also $\|Tx\| \leq \|T'\| \, \|x\|$ und folglich $\|T\| \leq \|T'\|$.

(c) Der Operator T ist genau dann bijektiv, wenn T' bijektiv ist.

Lösung: Sei zuerst T bijektiv. Dann ist nach dem Satz von der beschränkten Inversen auch T^{-1} beschränkt. Sei $T'y' = 0$. Dann ist $\langle Tx, y' \rangle = 0$ für alle $x \in X$, und da T surjektiv ist, ist $\langle y, y' \rangle = 0$ für alle $y \in Y$. Also ist y'. Dies zeigt, dass T' injektiv ist. Sei nun $x' \in X'$ vorgegeben. Dann definiert $\langle y', y \rangle := \left\langle x', T^{-1}y \right\rangle$ ein stetiges Funktional $y' \in Y'$, und es gilt

$$\left\langle x, T'y' \right\rangle = \left\langle Tx, y' \right\rangle = \left\langle x, x' \right\rangle$$

für alle $x \in X$, also $T'y' = x'$. Folglich ist T' surjektiv.

Sei nun T' bijektiv. Dann ist auch $T''\colon X'' \to Y''$ bijektiv und daher invertierbar und wegen

$$\big\langle Tx, y' \big\rangle = \big\langle x, T'y' \big\rangle = \big\langle T''x, y' \big\rangle$$

für alle $x \in X \subset X''$ und $y \in Y'$ stimmen Tx und $T''x$ als Elemente von X'' überein. Also bildet T'' den Raum X nach Y ab und stimmt dort mit T überein. Insbesondere ist T injektiv. Es ergibt sich aber auch, dass das Bild von T, also die Menge $T''(X)$, als Bild einer abgeschlossenen Menge unter einer bistetigen Funktion abgeschlossen ist. Zudem ist das Bild von T dicht in Y. Anderenfalls gäbe es nämlich nach dem Satz von Hahn-Banach ein $y' \in Y'$, $y' \neq 0$, mit $\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = 0$ für alle $x \in X$, also $T'y' = 0$, im Widerspruch zur Injektivität von T'. Da das Bild von T abgeschlossen und dicht in Y ist, ist T surjektiv.