Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 10.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

# Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 4

**14.** Seien $1 \le p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gegeben. Zeige: Die punktweise Multiplikation

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to L^r(\Omega),\ (f, g) \mapsto f \cdot g$$

ist wohldefiniert und stetig.

**15.** Sei $1 \le p < \infty$. Zeige: Die Abbildungen $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ und $u \mapsto |u|$ sind Lipschitz-stetig in $L^p(\Omega)$. Sind sie auch stets Lipschitz-stetig in $W^{1,p}(\Omega)$?

**16.** Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

(a) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $u(x) \in \mathbb{Q}$ fast überall. Dann ist $\nabla u = 0$.
**Bemerkung:** In diesem Fall besitzt $u$ einen auf Zusammenhangskomponenten von $\Omega$ konstanten Repräsentanten.

(b) Zeige, dass die Funktion $u := \mathbb{1}_{B(0,1)}$ nicht in $W^{1,p}(B(0,2))$ liegt!

**17.** Sei $1 < p < \infty$. Zeige: Der Operator $\Delta_p \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)'$ ist stetig.

**18.** Sei $1 < p < \infty$, $F \in W^{1,p}(\Omega)'$. Zeige, dass es $f, f_j \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$\langle F, u \rangle = \int_\Omega f u + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j D_j u$$

gibt! Sind diese Funktionen eindeutig bestimmt?

**19.** Sei $1 < p < \infty$, $\Delta_p^N \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)'$ definiert durch

$$\left\langle \Delta_p^N u, v \right\rangle := -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v.$$

Zeige: Zu jedem $f \in L^{p'}(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $|u|^{p-2}u - \Delta_p^N u = f$.
**Hinweis:** Da der Beweis, dass $u \mapsto |u|^{p-2}u - \Delta_p^N$ stetig ist, genau wie für Aufgabe 17 geführt werden kann, braucht dies hier nicht nochmals ausgeführt zu werden.