Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 17.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 5

20. Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein Unterraum von X, und sei $A\colon D(A) \to X$ linear. Zeige:

(a) Der Vektorraum $D(A)$ mit der Norm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ ist genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist.

Bemerkung: Die Norm $\|\cdot\|_A$ heißt *Graphennorm bezüglich A*.

Lösung: $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist isometrisch isomorph zu $\mathcal{G}(A) \subset X \oplus_1 X$. Folglich: A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}(A)$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}(A)$ vollständig $\Leftrightarrow$ $(D(A), \|\cdot\|_A)$ vollständig.

(b) Sei A bijektiv. Der Operator $A^{-1}\colon X \to X$ ist genau dann stetig, wenn A abgeschlossen ist.

Lösung: Sei A abgeschlossen. Dann sieht man schnell ein, dass auch A^{-1} abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist somit A^{-1} stetig.
Ist umgekehrt A^{-1} stetig, so insbesondere auch abgeschlossen. Also ist auch A abgeschlossen.

Bemerkung: Man kann auch argumentieren, dass $A\colon (D(A), \|\cdot\|_A) \to X$ ein stetig ist. Dann ist nach dem Satz von der beschränkten Inversen auch $A^{-1}\colon X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ stetig. Da $(D(A), \|\cdot\|_A)$ stetig nach X einbettet, zeigt dies ebenfalls die Behauptung.

(c) Sei A abgeschlossen und $D(A)$ dicht in X. Dann ist A genau dann stetig, wenn $D(A) = X$ ist.

Lösung: Ist $D(A) = X$, so ist A nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.
Sei nun A stetig, abgeschlossen und dicht definiert. Sei $x \in X$. Dann gibt es (x_n) in $D(A)$ mit $x_n \to x$, und insbesondere ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Weil A auf dem normierten Raum $(D(A), \|\cdot\|)$ stetig ist, ist A dort auch beschränkt und somit (Ax_n) ebenfalls eine Cauchy-Folge, also konvergent in X gegen ein y. Weil A abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A)$ (und $Ax = y$), insgesamt also $X \subset D(A)$.

21. Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein Unterraum von X, $A\colon D(A) \to X$ linear, und sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Zeige:

(a) Der Operator $T - A$ mit Definitionsbereich $D(T - A) := D(A)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

Lösung: Sei A abgeschlossen. Sei (x_n) eine Folge in $D(T - A) = D(A)$ die gegen x konvergiert, und konvergiere $(T - A)x_n$ gegen ein y. Wegen Stetigkeit konvergiert dann Tx_n gegen Tx und somit $Ax_n = Tx_n - (T - A)x_n$ gegen $Tx - y$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A) = D(T - A)$ und $Ax = Tx - y$, also $(T - A)x = y$.
Ist umgekehrt $T - A$ abgeschlossen, so ist nach dem bereits Bewiesenen auch $T - (T - A) = A$ abgeschlossen.

(b) Ist $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ invertierbar.

Lösung: Wie in der Vorlesung angegeben raten wir $S := \sum_{n=0}^\infty T^n$ als Inverse. Wegen $\|T^n\| \le \|T\|^n$ konvergiert die Reihe in $\mathscr{L}(X)$. Zudem gilt wegen Stetigkeit der Operatorkomposition

$$(I - T)S = S(I - T) = \sum_{n=0}^\infty T^n - \sum_{n=0}^\infty T^{n+1} = I.$$

(c) Die Resolventenmenge $\varrho(A) \subset \mathbb{R}$ ist offen.

Lösung: Sei $\lambda_0 \in \varrho(A)$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda - A = (\lambda_0 - A) - (\lambda_0 - \lambda) = \big(I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}\big)(\lambda_0 - A)$$

Ist nun $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \coloneqq \|(\lambda_0 - A)^{-1}\| > 0$, so sind beide Operatoren invertierbar. Insbesondere ist dann $\lambda - A$ von $D(A)$ nach X bijektiv und abgeschlossen, also invertierbar. Folglich ist $B(\lambda_0, \varepsilon) \subset \varrho(A)$.

22. Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X und A ihr Generator. Es gelte $\limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| < 1$. Zeige:

(a) $\lim_{t\to 0} T(t) = I$ in $\mathscr{L}(X)$.
Tipp: Man kann die Identität $2(T(t) - I) = T(2t) - I - (T(t) - I)^2$ ausnutzen.

Lösung: Sei $r \coloneqq \limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| \geq 0$. Aus der obigen Identität, die man leicht nachrechnet, folgt

$$2\|T(t) - I\| \leq \|T(2t) - I\| + \|T(t) - I\|^2.$$

Bildet man auf beiden Seiten den Limes Superior mit $t \to 0$, erhält man $2r \leq r + r^2$, also $r \leq r^2$, was für $r \geq 0$ nur bei $r = 0$ oder $r \geq 1$ möglich ist. Da nach Voraussetzung $r < 1$ gilt, folgt $r = 0$, also $T(t) \to I$ in $\mathscr{L}(X)$.

(b) Es gibt $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\mathrm{d}t$ für $\lambda > \lambda_0$.
Hinweis: Inbesondere ist zu zeigen, dass dieses Integral existiert.

Lösung: Laut Vorlesung gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq M\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ und

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)x\, \mathrm{d}t$$

für $x \in X$ und $\lambda \geq \lambda_0$. Weil $t \mapsto T(t)$ nach dem ersten Aufgabenteil als Funktion von $[0, \infty)$ nach $\mathscr{L}(X)$ stetig in $t = 0$ ist, ist $t \mapsto T(t)$ sogar auf $[0, \infty)$ stetig, was man wie in der Vorlesung beweist. Also existiert das uneigentliche Integral

$$R_\lambda \coloneqq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\mathrm{d}t$$

für $\lambda \geq \lambda_0$. Weil die Abbildung $S \mapsto Sx$ auf $\mathscr{L}(X)$ stetig ist, folgt $(\lambda - A)^{-1}x = R_\lambda x$, also die Behauptung.

(c) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda - A)^{-1} = I$ in $\mathscr{L}(X)$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\|T(t) - I\| < \varepsilon$ für $t \in [0, \delta]$. Seien $\omega \geq 0$ und $M \geq 1$ so gewählt, dass $\|T(t)\| \leq M\, \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ gilt. Dann ist für $\lambda > \max\{0, \omega, \lambda_0\}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda - A)^{-1} - I\| &= \Big\|\lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\mathrm{d}t - \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, I\mathrm{d}t\Big\| \leq \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \|T(t) - I\|\mathrm{d}t \\
&\leq \lambda \int_0^\delta \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \varepsilon\, \mathrm{d}t + \lambda \int_\delta^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(M\, \mathrm{e}^{\omega t} + 1)\mathrm{d}t \\
&= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda\delta})\varepsilon + \lambda(M + 1) \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda-\omega)t}}{-(\lambda - \omega)}\Big|_\delta^\infty \leq \varepsilon + \frac{\lambda(M + 1)}{\lambda - \omega}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\omega)\delta}.
\end{aligned}$$

Für hinreichend große Werte von λ wird die rechte Seite beliebig klein.

Bemerkung: Man könnte die Aussage auch ohne Verwendung des vorigen Aufgabenteils zeigen, indem man $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|$ mit der gleichen Rechnung wie oben durch $2\varepsilon\|x\|$ abschätzt.

(d) A ist beschränkt und es gilt $D(A) = X$.

Lösung: Es gibt ein $\lambda > 0$ mit $\|I - \lambda(\lambda - A)^{-1}\| < 1$. Also ist

$$\lambda(\lambda - A)^{-1} = I - (I - \lambda(\lambda - A)^{-1})$$

invertierbar, und folglich auch $(\lambda - A)^{-1}$. Insbesondere ist $(\lambda - A)^{-1}$ surjektiv, und da $(\lambda - A)^{-1}$ nach $D(\lambda - A) = D(A)$ abbildet, ist $D(A) = X$. Außerdem ist die Inverse $\lambda - A$ von $(\lambda - A)^{-1}$ stetig, was die Stetigkeit von A zeigt.

23. Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann gibt es zu jedem $x'' \in X''$ genau ein $x \in X$ mit $\langle x'', x'\rangle = \langle x', x\rangle$ für alle $x' \in X'$. Sei $T\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(X)$ eine Funktion, $T(0) = I$ und $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $s, t > 0$. Für jedes $x \in X$ und $x' \in X'$ sei $t \mapsto \langle x', T(t)x\rangle$ auf $[0,\infty)$ stetig. Zeige:

(a) Es gibt ein $M \geq 1$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$.

Lösung: Es gibt ein $\tau > 0$ mit $\sup_{0\leq t\leq\tau} \|T(t)\| < \infty$, denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit eine Nullfolge (t_n) mit $\|T(t_n)x\| \to \infty$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $T(t_n)x$ schwach gegen x konvergiert und schwach konvergente Folgen beschränkt sind. Nun zeigt man die exponentielle Beschränktheit genau wie in der Vorlesung.

(b) Zu jedem $r > 0$ und $x \in X$ gibt es genau ein $x_r \in X$ mit $\langle x', x_r\rangle = \frac{1}{r}\int_0^r \langle x', T(t)x\rangle\,\mathrm{d}t$.
Bemerkung: Dies ist sogar für nicht-reflexive X richtig.

Lösung: Sei $f_{x,x'}(t) := \langle x', T(t)x\rangle$. Definiere x'' durch $\langle x'', x'\rangle := \frac{1}{r}\int_0^r f_{x,x'}$. Wegen $|f_{x,x'}| \leq \|x'\|M\,\mathrm{e}^{\omega r}\,\|x\|$ für $0 \leq t \leq r$ ist $|\langle x'', x'\rangle| \leq c\|x'\|$ für eine Konstante $c \geq 0$. Weil $x' \mapsto f_{x,x'}$ linear ist, zeigt dies $x'' \in X''$. Wegen Reflexivität gibt es also ein x_r wie in der Aussage.

Bemerkung: Für nicht-reflexive Räume ist das Argument komplizierter: Wegen schwacher Stetigkeit ist das Bild B von $[0,r]$ unter $t \mapsto T(t)x$ schwach kompakt in X. Nach einem Satz der Funktionalanalysis (Krein-Milman) ist dann auch der schwache Abschluss C der konvexen Hülle von B eine schwach kompakte Teilmenge von X, und daher schwach*-kompakt als Teilmenge von X'', insbesondere also schwach*-abgeschlossen. Weil das (Riemann-)Integral $\frac{1}{r}\int_0^r T(t)x$ aber in X'' schwach* gegen x'' konvergiert und die Riemann'schen Zwischensummen als Konvexkombinationen stets in C liegen, liegt damit auch der Grenzwert x'' in C und somit insbesondere in X, wenn wir X in der üblichen Art als Teilraum von X'' auffassen. Das bedeutet gerade, dass es ein $x_r \in X$ mit $\langle x'', x'\rangle = \langle x', x_r\rangle$ für alle $x' \in X'$ gibt, also die gewünschte Aussage.

(c) Der lineare Aufspann der Menge $\{x_r : r > 0,\, x \in X\}$ ist dicht in X.

Lösung: Wäre die Aussage falsch, so gäbe es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $x' \in X'$, $x' \neq 0$ mit $\langle x', x_r\rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $r > 0$. Dann gilt nach Definition der x_r auch $\int_0^r \langle x', T(t)x\rangle\,\mathrm{d}t = 0$ für alle $r > 0$ und $x \in X$ und somit nach Differentiation $\langle x', T(t)x\rangle = 0$ für alle $r > 0$. Wegen $T(t)x \rightharpoonup x$ für $t \to 0$ folgt daraus $\langle x', x\rangle = 0$ für alle $x \in X$, also $x' = 0$, im Widerspruch zur Wahl von x'.

(d) Für alle $x \in X$ und $r > 0$ gilt $\lim_{t\to 0} T(t)x_r = x_r$ in X.

Lösung: Sei $t \in (0, r)$. Dann gilt für $x' \in X'$

$$\begin{aligned}\big\langle x', T(t)x_r - x_r\big\rangle = \big\langle T(t)'x' - x', x_r\big\rangle &= \frac{1}{r}\int_0^r \big\langle T(t)'x' - x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{r}\int_0^r \big\langle x', T(t+s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^r \big\langle x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{r}\int_t^{r+t} \big\langle x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^r \big\langle x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{r}\int_r^{r+t} \big\langle x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s - \frac{1}{r}\int_0^t \big\langle x', T(s)x\big\rangle\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Also gilt unter Verwendung des Satzes von Hahn-Banach

$$\|T(t)x_r - x_r\| = \sup_{\|x'\|\le 1}\big|\big\langle x', T(t)x_r - x_r\big\rangle\big| \le \frac{2t}{r}\sup_{0\le s\le 2r}\|T(s)\|\|x\|\cdot\|x'\|,$$

was $\lim_{t\to 0} T(t)x_r = x_r$ in X zeigt.

(e) Die Familie $(T(t))_{t\ge 0}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf X.

Lösung: Aus der Funktionalanalysisvorlesung ist folgender (einfach zu beweisender) Satz bekannt: Ist (T_n) eine Folge beschränkter linearer Operatoren, gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$ und konvergiert $(T_n x)$ für alle $x \in D$ für eine dichte Teilmenge D von X, so gibt es einen beschränkten linearen Operator $T \in \mathscr{L}(X)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ für alle $x \in X$.

In unserem Fall betrachten wir $T(t_n)$ für eine beliebige Nullfolge (t_n). Wir haben schon gesehen, dass $(T(t))_{t\in[0,t_0]}$ und daher auch $(T(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{L}(X)$ beschränkt ist. Nach dem vorigen Aufgabenteil konvergiert $(T(t_n)x_r)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in X$ und $r > 0$ gegen x_r, und daher konvergiert auch $(T(t_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x für alle x im linearen Aufspann der x_r, also auf einem dichten Unterraum. Nach obiger Bemerkung gilt also $T(t_n)x \to x$ für alle $x \in X$. Weil (t_n) eine beliebige Nullfolge war, heißt dies gerade $T(t)x \to x$ für $t \to 0$. Das bedeutet nach Definition, dass $(T(t))_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe ist.

Bemerkung: Wie bereits angedeutet bleibt diese Folgerung auch in nicht-reflexiven Räumen richtig. Man sagt kurz, dass eine Halbgruppe genau dann stark stetig ist, wenn sie schwach stetig ist. Eine analoge Aussage für schwach* stetige Halbgruppen auf X', also Familien, bei denen man nur die Stetigkeit von $t \mapsto \langle T(t)x', x\rangle$ auf $[0,\infty)$ für alle $x \in X$ fordert, ist allerdings falsch. Ein konkretes Gegenbeispiel wird durch $(T(t)f)(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-tx^2} f(x)$ auf $L^\infty(\mathbb{R}) = L^1(-\infty,\infty)'$ definiert.