Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 24.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 6

24. Sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator B. Zeige:

(a) Die Einschränkung $(S_1(t))_{t\geq 0} \coloneqq (S(t)|_{D(B)})_{t\geq 0}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf $D(B)$ bezüglich der Graphennorm.

(b) Der Generator B_1 von S_1 erfüllt $D(B_1) = D(B^2)$ und $B_1 x = Bx$ für $x \in D(B_1)$.

(c) Der Unterraum $D(B^2)$ ist dicht in X.

25. Seien V und H Hilberträume, $V \hookrightarrow_d H$, a eine bilineare, stetige, H-elliptische Form auf V, $A \sim a$, und $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe.

(a) Es gilt $D(A) \hookrightarrow V$, wobei $D(A)$ mit der Graphennorm versehen sei.

(b) Ist $u_0 \in D(A^2)$, so ist $S(\cdot)u_0 \in \mathrm{C}^1([0,\infty); V)$.

26. (a) Sei $\mathrm{C}_{2\pi}$ der Raum der 2π-periodischen stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, und sei $(S(t)f)(x) \coloneqq f(x+t)$. Zeige, dass $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_{2\pi}$ ist und bestimme ihren Generator!

(b) Sei Ω ein σ-endlicher Maßraum und $m\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte messbare Funktion. Zeige, dass $(S(t)u)(x) \coloneqq \mathrm{e}^{tm(x)}\, u(x)$ für $1 \leq p < \infty$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$ definiert und bestimme ihren Generator!

27. Sei X ein separabler Banachraum und $f\colon [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar. Zeige, dass f auch (Bocher-)integrierbar ist und die beiden Integrale übereinstimmen!
Hinweis: Man darf verwenden, dass jede skalarwertige Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist und die Integrale übereinstimmen.

28. Sei H ein separabler Hilbertraum und $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von H. Definiere $f(t) \coloneqq \frac{2^{n+1}}{n+1} e_n$ für $t \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ und $f(0) \coloneqq 0$. Zeige, dass es ein $y \in H$ mit $\langle x', y\rangle = \int_0^1 \langle x', f(t)\rangle\, \mathrm{d}t$ für alle $x' \in H'$ gibt; insbesondere ist zu zeigen, dass $\langle x', f(\cdot)\rangle$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar?