Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 08.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 7

29. Sei X ein separabler Banachraum und $f \in L^1(0,1;X)$. Es gelte $f'' \in L^1(0,1;X)$ distributionell, d.h. es gebe $f'' := g \in L^1(0,1;X)$ mit $\int_0^1 f\varphi'' = \int_0^1 g\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$. Zeige:

(a) Ist $f'' = 0$, so gibt es $x, y \in X$ mit $f(t) = tx + y$ für fast alle $t \in (0,1)$.

(b) $f \in W^{2,1}(0,1;X)$, d.h. $f \in W^{1,1}(0,1;X)$ und $f' \in W^{1,1}(0,1;X)$.

30. Sei X ein separabler Banachraum, $1 \leq p < \infty$ und $a < b$. Zeige:

(a) Sind $u, u_n \in W^{1,p}(a,b;X)$ so gewählt, dass $u_n(a) = u(a)$ gilt und u_n' in $L^p(a,b;X)$ gegen u' konvergiert, so konvergiert u_n in $W^{1,p}(a,b;X)$ gegen u.

(b) $\mathrm{C}([a,b];X)$ ist dicht in $L^p(a,b;X)$.

(c) $\mathrm{C}^1([a,b];X)$ ist dicht in $W^{1,p}(a,b;X)$.

31. *Partielle Integration:* Sei X ein Banachraum, X' separabel, $a < b$ und $1 < p < \infty$. Dann ist auch X separabel. Zeige, dass für $f \in W^{1,p}(a,b;X)$ und $g \in W^{1,p'}(a,b;X')$

$$\int_a^b \langle g, f' \rangle = \langle g(b), f(b) \rangle - \langle g(a), f(a) \rangle - \int_a^b \langle g', f \rangle$$

gilt!

32. Sei X ein separabler Banachraum, $1 < p < \infty$, $a < b$ und $f \in W^{1,p}(a,b;X)$. Zeige, dass f hölderstetig ist, dass es also ein $\alpha > 0$ und ein $c \geq 0$ mit $\|f(t) - f(s)\| \leq c|t-s|^\alpha$ für alle $s, t \in [a,b]$ gibt!

33. Seien $1 < p, q < \infty$ und $a < b$. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \geq 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass

$$\|u\|_{L^q(a,b)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^q(a,b)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^p(a,b)}$$

für alle $u \in L^p(a,b)$ mit $u' \in L^q(a,b)$ gilt.
Tipp: Der Satz von Aubin-Lions und das Lemma von Ehrling können hier helfen.