Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 7

29. Sei X ein separabler Banachraum und $f \in L^1(0,1;X)$. Es gelte $f'' \in L^1(0,1;X)$ distributionell, d.h. es gebe $f'' := g \in L^1(0,1;X)$ mit $\int_0^1 f\varphi'' = \int_0^1 g\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$. Zeige:

(a) Ist $f'' = 0$, so gibt es $x, y \in X$ mit $f(t) = tx + y$ für fast alle $t \in (0,1)$.

Lösung: Sei $\psi \in \mathcal{D}(0,1)$ so gewählt, dass $\int_0^1 \psi = 1$ ist. Sei $w \in \mathcal{D}(0,1)$ beliebig. Dann gibt es wie in der Vorlesung gezeigt ein $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ mit $\varphi' = w - \psi \int_0^1 w(s)\mathrm{d}s$. Nach Voraussetzung gilt dann mit $x := -\int_0^1 f\psi'$

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 f\varphi'' &= \int_0^1 fw' - \int_0^1 w \int_0^1 f\psi' = \int_0^1 fw' + \int_0^1 xw \\ &= \int_0^1 fw' + \big[txw\big]_0^1 - \int_0^1 txw'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - tx)w'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Weil $w \in \mathcal{D}(0,1)$ beliebig war, zeigt dies, dass $t \mapsto f(t) - tx$ in $W^{1,1}(0,1)$ liegt und die schwache Ableitung 0 ist. Laut Vorlesung gibt es dann ein $y \in X$ mit $f(t) - tx = y$ für fast alle t, was gerade die Behauptung war.

(b) $f \in W^{2,1}(0,1;X)$, d.h. $f \in W^{1,1}(0,1;X)$ und $f' \in W^{1,1}(0,1;X)$.

Lösung: Die Funktion $g(t) := \int_0^t \int_0^s f''(r)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$ erfüllt offenbar $g \in W^{2,1}(0,1;X)$ und $g'' = f''$. Nach dem vorigen Aufgabenteil gibt es also x und y in X mit $(f-g)(t) = tx + y$ für fast alle t. Somit ist $f(t) = g(t) + tx + y$ für fast alle t, was $f \in W^{2,1}(0,1;X)$ zeigt.

30. Sei X ein separabler Banachraum, $1 \le p < \infty$ und $a < b$. Zeige:

(a) Sind $u, u_n \in W^{1,p}(a,b;X)$ so gewählt, dass $u_n(a) = u(a)$ gilt und u_n' in $L^p(a,b;X)$ gegen u' konvergiert, so konvergiert u_n in $W^{1,p}(a,b;X)$ gegen u.

Lösung: Es ist

$$u_n(t) - u(t) = u_n(a) + \int_a^t u_n'(s)\mathrm{d}s - u(a) - \int_a^t u'(s)\mathrm{d}s = \int_a^t u_n'(s) - u'(s)\mathrm{d}s,$$

also

$$\int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|^p \mathrm{d}t \le \int_a^b \left(\int_a^t \|u_n'(s) - u'(s)\|\mathrm{d}s \right)^p \mathrm{d}t \le (b-a)^{1+\frac{p}{p'}} \|u_n' - u'\|_p^p \to 0.$$

Folglich konvergiert u_n in $L^p(a,b;X)$ gegen u. Da die Konvergenz der Ableitungen bereits gefordert war, folgt die Behauptung.

(b) $\mathrm{C}([a,b];X)$ ist dicht in $L^p(a,b;X)$.

Lösung: Sei zuerst $f = \mathbb{1}_A\, x$ in $L^p(a,b;X)$ gegeben. Dann gibt es stetige Funktionen g_n mit $\|g_n - \mathbb{1}_A\|_p \to 0$, und daher sind $g_n \cdot x$ stetige Funktionen, die in $L^p(a,b;X)$ gegen f konvergieren. Da die Addition stetig ist, kann man folglich alle einfachen Funktionen annähern. Da diese in $L^p(a,b;X)$ dicht sind, liegen auch die stetigen Funktionen dicht.

(c) $\mathrm{C}^1([a,b];X)$ ist dicht in $W^{1,p}(a,b;X)$.

Lösung: Sei $f \in W^{1,p}(a,b;X)$. Nach dem ersten Aufgabenteil gibt es $g_n \in \mathrm{C}([a,b];X)$ mit $g_n \to f'$ in $L^p(a,b;X)$. Sei

$$G_n(t) := f(a) + \int_a^t g_n(s)\mathrm{d}s.$$

Dann ist $G_n \in \mathrm{C}^1([a,b];X) \subset W^{1,p}(a,b;X)$ und es gilt $G_n(a) = f(a)$ und $G_n' = g_n \to f'$ in $L^p(a,b;X)$. Nach dem ersten Aufgabenteil konvergiert (G_n) also in $W^{1,p}(a,b;X)$ gegen f.

31. *Partielle Integration:* Sei X ein Banachraum, X' separabel, $a < b$ und $1 < p < \infty$. Dann ist auch X separabel. Zeige, dass für $f \in W^{1,p}(a,b;X)$ und $g \in W^{1,p'}(a,b;X')$

$$\int_a^b \langle g, f' \rangle = \langle g(b), f(b) \rangle - \langle g(a), f(a) \rangle - \int_a^b \langle g', f \rangle$$

gilt!

Lösung: Ist $f \in \mathrm{C}^1([a,b];X)$ und $g \in \mathrm{C}^1([a,b];X')$, so weist man leicht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f, g \rangle = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$$

nach, was nach Integration gerade die Behauptung ist.

Seien nun $f \in W^{1,p}(a,b;X)$ und $g \in W^{1,p'}(a,b;X')$ beliebig gewählt. Dann gibt es nach der vorigen Aufgabe Folgen (f_n) in $\mathrm{C}^1([a,b];X)$ und (g_n) in $\mathrm{C}^1([a,b];X')$ mit $f_n \to f$ und $g_n \to g$ im jeweiligen Sobolevraum. Mit der Hölderungleichung und der stetigen Einbettung der Sobolevräume in die stetigen Funktionen sieht man, dass alle Terme in der zu beweisenden Identität stetig bezüglich der Sobolevnorm sind. Durch Grenzübergang erhält man daraus die Behauptung.

32. Sei X ein separabler Banachraum, $1 < p < \infty$, $a < b$ und $f \in W^{1,p}(a,b;X)$. Zeige, dass f hölderstetig ist, dass es also ein $\alpha > 0$ und ein $c \geq 0$ mit $\|f(t) - f(s)\| \leq c|t-s|^\alpha$ für alle $s,t \in [a,b]$ gibt!

Lösung: Es ist

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f'\| \right| \leq |t-s|^{(p-1)/p} \|f'\|_p.$$

33. Seien $1 < p, q < \infty$ und $a < b$. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \geq 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass

$$\|u\|_{L^q(a,b)} \leq \varepsilon \|u'\|_{L^q(a,b)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^p(a,b)}$$

für alle $u \in L^p(a,b)$ mit $u' \in L^q(a,b)$ gilt.
Tipp: Der Satz von Aubin-Lions und das Lemma von Ehrling können hier helfen.

Lösung: Für $q \leq p$ ist $L^p(a,b)$ stetig in $L^q(a,b)$ eingebettet und daher die Aussage sogar mit $\varepsilon = 0$ richtig. Sei also $q > p$. Nach dem Satz von Aubin-Lions ist $W := W(a,b;\mathbb{R},\mathbb{R},p,q)$ kompakt in $L^q(a,b)$ eingebettet, und dieser Raum ist wiederum stetig in $L^p(a,b)$ eingebettet. Nach dem Lemma von Ehrling gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon \geq 0$ mit

$$\|u\|_{L^q(a,b)} \leq \varepsilon \|u\|_W + c_\varepsilon \|u\|_{L^p(a,b)} = \varepsilon \|u\|_{L^p(a,b)} + \varepsilon \|u'\|_{L^q(a,b)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^p(a,b)}.$$

Dies ist die Behauptung.